

现代数学译丛 7

有限群论导引

〔德〕Hans Kurzweil　Bernd Stellmacher 著

施武杰　李士恒 译

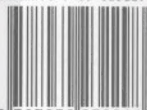
黄建华　校





科学出版社
www.sciencep.com

(O-3361.0101)



ISBN 978-7-03-023229-8

销售分类建议：高等数学

定价：58.00 元

现代数学译丛 7

有限群论导引

〔德〕Hans Kurzweil Bernd Stellmacher 著

施武杰 李士恒 译

黄建华 校

科学出版社

北京

图字: 01-2007-3535 号

内 容 简 介

本书是一本有限群的入门书, 展示了有限群现代理论的概念、方法和结果. 全书共 12 章, 前 8 章是基础, 附有习题. 全书主要内容包括: 群论的基本概念, 置换群, p 群和幂零群, 可解群, 群在陪集和群上的作用、互素作用和二次作用, 有限群的局部和整体的对应等.

"该书较早地引入了群在集合和群上的作用, 且在整本书中都对此进行了行之有效的运用" (摘自美国《数学评论》). "这是一本写得很好的书. 它不仅给出了进入这个学科领域的入门知识, 而且为我们展示了近斯研究中非常活跃的部分. 它是为我们讲解融合方法及其应用的第一本书" (摘自德国《数学文摘》).

本书可作为高等院校数学、物理和化学专业高年级学生和研究生教材, 并适合于上述专业的学生、教师和有关的科技工作者阅读.

图书在版编目 (CIP) 数据

有限群论导引/(德) Hans Kurzweil 等著; 施武杰, 李士恒译. —北京: 科学出版社, 2009
(现代数学译丛; 7)
ISBN 978-7-03-023229-8
I. 有… II. ① Hans… ② 施… ③ 李… III. 有限群 IV. O152. 1
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 162636 号

责任编辑: 陈玉琢 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 2 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)
2009 年 2 月第一次印刷 印张: 19 1/2
印数: 1—2 500 字数: 372 000

定价: 58.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

寄语中国学生

群论课程很可能在几个方面与以前学过的其他数学课程有所不同. 要解的方程很少, 公式则更少. 虽然有一些定义和定理需要学习, 但仅靠死记硬背很难通过这门课程. 深刻理解概念并能够应用它们, 是成功的基础.

本书也很可能在几个方面不同于其他群论教材:

"我们将尽可能向读者介绍这样一些内容, 据此将有助于读者 (在群论领域中) 获得成功, 或可能为将来的工作打开新的前景"(摘自本书英文版序).

"该书是在许多方向深入研究的出发点" (摘自 H. Bechtell, 美国《数学评论》).

"作用是本书的核心内容, 我们的讨论涉及这一概念的若干方面, 如群在陪集和群上的作用, 互素作用和二次作用等"(摘自本书英文版序).

"这是为我们讲解融合方法及其应用的第一本书"(摘自 G.Stroth, 德国《数学文摘》).

本书的前 8 章试图给出一个快速直接的途径, 使得每一个对有限群感兴趣的学生能很快地接触那些应该知道的方法和结果. 前 8 章都附有习题. 这些习题是重要的, 它将会使学生得到从事群论研究和发现自我的能力.

这门课程有两个显著的特点, 一是高度抽象, 二是比以前所学过的数学课程更强调证明. 由于特点之一是证明. 在阅读本书之前, 让我们说明本书中是如何处理证明的. 目标是能读懂证明, 并且能独立地进行证明. 帮助达到这一目标的方法也许要回忆起写作课. 首先, 必须阅读、分析并研究许多范例, 然后才能尝试以自己的风格去写作, 修订, 最后创作出一篇有说服力的文章. 这里, 没有任何公式和固定的路子.

本书将提供大量的证明供阅读和分析. 一些习题要求对证明进行概括、分析和评论, 另一些则要求完成一些未完成的证明. 最后, 有许多机会自己去构造一个证明. 相信自己, 阅读和证明是一项可学习的技能.

更广泛地讲, 我们希望本书能帮助你成为一个善于思考的学习者, 一个具有创新精神的解决问题的能手.

衷心祝愿你获得有趣的体验和成功.

Hans Kurzweil
Bernd Stellmacher

A Word to Chinese Students

A group theory course is likely to be different from your previous mathematics courses in several ways. There are very few equations to solve, even fewer formulas. Although there will be definitions and theorems to learn, rote learning memorization alone will not carry you through the course. Understanding concepts well enough to apply them in a variety of settings is essential for success.

This book is also likely to be different from other group theory texts in several ways:

"We want to introduce the reader to some of the developments in this area that contributed to this success or may open new perspectives for the future" (quoted from the preface of English edition of this book).

"The text serves as a springboard for deeper study in many directions" (quoted from H. Bechtell, *Mathematical Reviews*).

"The notation of action, in all its facets, like action on sets and groups, coprime action and quadratic action, is at the center of our exposition" (quoted from the English edition of this book).

"This is a first book which shows us the amalgam method and moreover shows how it works" (quoted from G. Stroth, *Zentralblatt*).

The first eight chapters are intended to give a fast and direct approach to those methods and results that every student should know who is interested in finite groups. The first eight chapters are accompanied by exercises. These exercises are important and they should allow the students to get engaged with group theory and to find out about their abilities.

Two distinctive features of this course are a higher level of abstraction and more emphasis on proofs than you have perhaps encountered in earlier mathematics course. One of the features is proofs. Before you close the book right here, let us tell you something about how proofs are handled in this book. The goal is for you to be able to read proofs intelligently and to produce proofs on your own. The way we help you to achieve this goal may remind you of your composition classes. First, you read, analyze and study many examples. Next, you try your hand at the specific style and rewrite it to produce an essay or whatever form is required. There are no formulas

or rote procedures for writing.

In this book we give you lots of proofs to read and analyze. Some exercises ask you to outline, analyze or critique a proof. Other exercises require the completion of partial proofs. Finally, there are many opportunities for you to construct a proof on your own. Believe us, reading and writing proofs are learnable skills.

On a large scale, we hope this text helps you become a reflective learner and an innovative problem solver.

Best wishes for a successful and interesting experience.

Hans Kurzweil
Bernd Stellmacher

中译本前言

本书的德文版是第一译者在出席 1998 年于柏林举行的国际数学家大会后，从著名群论专家 O. H. Kegel 教授处得到的. O.H. Kegel 明确指出："作为研究生教材，这是一本很好的教科书." 时光很快地过了 6 年，当得知此书已有英文版时，译者购买了此书的英文版. 此时，本书的第二译者已成为译者的博士研究生. 师生共同努力，在教学过程中边读边翻译出了此书的初稿. 无独有偶，校者也用此书的德文版为教材培养了多年的研究生.

关于本书，一些群论专家给出了很高的评价，我们摘译如下：

H. Bechtell 在《数学评论》中指出："这是一本激动人心的教科书，对 (群论) 这一领域给出了新的贡献，具有使读者爱不释手的魅力. 尽管本书没有讲到表示论和单群的结构，但仍然是在许多方向进行深入研究的出发点. 读完本书，读者不仅在有限群理论的深度和广度两方面获得知识，而且能够深切地感受到那些构成现代研究基础的概念的产生和发展. 这些概念是通过一条主线从一个到另外一个自然地联系起来的，而不是断开的. 该书较早地引入了群在集合和群上的作用，并且在整本书中都对此进行了行之有效的运用. 参考书目 (对相关内容) 提供了很好的补充."

G. Stroth 在《数学文摘》中指出："总之，这是一本写得很好的书. 它不仅给出了进入这个学科领域的入门，而且为我们展示了近期研究中非常活跃的部分. 它是为我们讲解融合方法及其应用的第一本书. 也许它能够与 20 世纪六七十年代 Gorenstein 的名著一样对群论产生同样的影响. 这是一本值得每个图书馆收藏的书."

根据我们的教学经验，本书的前几章比较容易读懂，但习题较难. 可以把一些较难的题放一放，到后面再去做. 本书的前三四章可以作为大学高年级本科生的选修课教材，前 8 章 (附有习题) 可作为研究生教材，最后 4 章是一些比较深入的专题研讨. 对于研究生来讲，我们提倡读原文，但在教学中我们也发现有些同学对原文理解不准确. 在翻译此书的过程中，我们也改正了原文的一些错误 (包括印刷错误).

苏州大学将本书作为研究生优秀教材建设立项并给以经费资助，译校者的研究生们对本书的翻译也提供了具体的帮助，特别是本书的出版得到了徐明曜教授的支持，在此我们一并表示由衷的感谢.

2008 年是本书第一译者的导师陈重穆教授逝世 10 周年，本书的第二作者

B. Stellmacher 教授是校者的博士生导师, 我们以此书的出版来表达对他们的怀念和感谢!

由于译校者的水平有限, 书中可能会有一些问题和疏漏, 不当之处恳请读者指正.

译校者

2008 年 5 月

前　言

有限群理论始于 19 世纪, 现已发展成为一个内容丰富且独立的代数学分支. 20 世纪 80 年代初, 这样的发展在有限单群分类的过程中达到顶点, 有限单群分类的方法和结论给了人们一个深刻的印象和令人信服的论证.

在本书中, 我们将尽可能 —— 在一个导引尽可能做到的范围内 —— 向读者介绍这样一些内容, 据此将有助于读者 (在群论领域中) 获得成功, 或可能为将来的工作打开新的局面.

本书的前 8 章试图给出一个快速直接的途径, 使得每一个对有限群感兴趣的人能很快地接触那些应该知道的方法和结果. 有些部分, 如幂零群和可解群, 只介绍一般情况下所必须了解和研究的内容.

作用是本书的核心内容, 我们的讨论涉及这一概念的若干方面, 如群在陪集和群上的作用、互素作用和二次作用等.

最后一章集中于有限群的局部和整体的对应. 具体目标是研究所有的 2 局部子群均为可解的非可解群. 读者将体会到本书中几乎所有的方法和结果都要用在这个研究上.

在这本书中, 我们至少有两部分内容没有涉及: 有限群表示论和对有限单群 (除少数例外情形) 的讨论. 对于这两部分内容, 我们感到在本书的框架内没有足够的方法来介绍它们.

对在本书中已证明或提到的较重要的结果, 我们将尽量给出原始论文作为参考, 在少数情况下也给出另外的证明. 在附录中, 我们陈述了有限单群分类定理以及一些和最后一章的课题相关的基本定理.

前 8 章都附有习题. 通常没有按照难度的递增来排列这些习题, 其中的一些需要读者深思熟虑和耐心地思考. 这些习题将会使读者得到从事群论研究和发现自我的能力.

读者可以把一些看起来较困难的练习推迟到以后, 以便运用比较丰富的经验和从后面章节的学习中得到的启发来证明它们.

在这里还应该指出, 除第 1 章外所考虑的群都是有限的.

要特别感谢同事 H. Bender. 没有他, 我们不会写这本书, 没有他的鼓励和支持, 将会是另外一种情形.

感谢 J. Hall 阅读了整个手稿, A. Chermak 阅读了其中的一部分. 也感谢

B. Baumann, D. Bandy, S. Heiss 和 P. Flavell, 他们提出了有益的评论和建议.

本书的德文版在 1998 年已由 Springer-Lehrbuch 出版.

Erlangen, Germany Hans Kurzweil

Kiel, Germany Bernd Stellmacher

February 2003

符号列表

目　录

第1章 基本概念

本章将介绍有限群理论的一些基本概念, 这些概念中大部分适用于任意群, 即有限群或无限群. 因此本章中所研讨的对象不要求为有限 (在后面的章节中会有有限性的假设).

1.1 群和子群

一个非空集合 G 称为**群** (group), 如果对每一个有序对 $(x, y) \in G \times G$, x 和 y 的**乘积** (product) $xy \in G$ 都是确定的, 并且满足下述公理:

结合律(associativity) 对任意的 $x, y, z \in G$, $x(yz) = (xy)z$.

存在**单位元** (identity) 在 G 中存在一个元素 e, 对任意的 $x \in G$ 都有 $ex = xe = x$ ①.

存在**逆元** (inverse element) 对每一个 $x \in G$ 存在一个元素 $x^{-1} \in G$, 使得

$$xx^{-1} = e = x^{-1}x.$$

如果群 G 也满足

交换律(commutativity) 对所有的 $x, y \in G$ 都有 $xy = yx$,

则称群 G 为**交换群** ②(或称**Abel群**).

下文中, 记号 G 总表示一个群. 结合律蕴含**广义结合律** (generalized associative law): G 中元素 x_i 的乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 对每一个 (合理的) 添加括号的方式都给出相同的元素. 所以 x_i 的乘积是确定的, 可简记为 $x_1x_2\cdots x_n$.

G 的单位元 e 可以记为 1(或 1_G). 如果 G 是交换群, 写为加法形式时, e 也可以记为 0(或 0_G).

记

$$G^{\#} := \{x \in G | x \neq e\}.$$

设 $x \in G$, y_1 和 y_2 是 x 的两个逆元, 则有

$$y_2 = (y_1x)y_2 = y_1(xy_2) = y_1.$$

---

① 如果 e' 也是一个单位元, 那么 $e' = ee' = e$. 于是 G 的单位元是唯一确定的.

② 交换群常写为加法形式. 此时, 由有序对 (x, y) 确定的元素记为 $x + y$, 叫做 x 与 y 的和(sum).

因此 x 的逆元是唯一确定的. 这说明对任意的 $a,b\in G$, 方程

$$ya=b \text{ 和 } ax=b$$

在 G 中都有唯一的解, 即

$$y=ba^{-1} \text{ 和 } x=a^{-1}b.$$

于是左、右消去律在群中都成立.

若 $x,a\in G$, 令

$$x^a:=a^{-1}xa.$$

称元素 x^a 为 x 的一个**共轭** (conjugate). 确切地说, x^a 是 x 在 a 下的共轭.

1.1.1 设 $a\in G$, 下面的几个映射:

$$x\mapsto xa,\quad x\mapsto ax,\quad x\mapsto x^{-1},\quad x\mapsto x^a$$

定义了 G 到 G 上的双射. □

对于 G 中的一个元 x, 定义 x 的**幂** (powers)

$$x^0:=1,\ x^1:=x,\cdots,x^{n+1}:=(x^n)x, \text{ 其中}, n\in\mathbb{N}$$[1]

和

$$x^{-n}:=(x^n)^{-1}.$$

于是

$$x^{-n}:=\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{n\text{个相乘}},$$

且对 n 用归纳法可得到**指数律** (laws of exponents): 对任意 $i,j\in\mathbb{Z}$, 有

$$x^{i+j}=x^ix^j \text{ 和 } (x^i)^j=x^{i\cdot j}.$$

如果群 G 只包含有限个元素, 那么群 G 叫做**有限群** (finite group). 此时, 群 G 的元素的个数叫做群 G 的**阶** (order), 记为 $|G|$. 每一个 n 阶的有限群 $G=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 都可以被它的**群表** (group table) $\boldsymbol{T}=(t_{ij})$ 描述, 其中, $t_{ij}=x_ix_j\in G$. 于是 $\boldsymbol{T}$ 是元素在 G 中的 $n\times n$ 矩阵. 例如,

① 在加法形式的群中, $nx=x+\cdots+x$(n 个 x 的和).

	1	d	d^2	t	td	td^2
1	1	d	d^2	t	td	td^2
d	d	d^2	1	td^2	t	td
d^2	d^2	1	d	td	td^2	t
t	t	td	td^2	1	d	d^2
td	td	td^2	t	d^2	1	d
td^2	td^2	t	td	d	d^2	1

是一个 6 阶非交换群的群表①.

建议读者用这个例子去验证后面要学到的概念和定义.

如果群 G 的每个元素都是 G 的某个固定元素 g 的幂, 那么把群 G 叫做**循环群** (cyclic group). 这时可记为

$$G = \langle g \rangle.$$

循环群的乘法由指数律决定. 特别地, 循环群是交换群.

设 $i, j, k \in \mathbb{Z}$, 如果 i 是 j 的因子, 那么记为 $i|j$ 且

$$\text{如果 } k|(i-j), \text{ 记为 } i \equiv j (\text{mod } k).$$

注意到每一个整数都是 0 的因子.

1.1.2 设 G 是一个 n 阶循环群, 那么

$$G = \{1, g, \cdots, g^{n-1}\}$$

且有

(a) $n = \min\{m \in \mathbb{N} \,|g^m = 1\}$.

(b) 对 $z \in \mathbb{Z}$ 有: $g^z = 1 \Leftrightarrow n|z$.

(c) 对 $i, j, k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ 有 $g^i g^j = g^k \Leftrightarrow i + j \equiv k (\text{mod } n)$.

证明 因 $|\langle g \rangle| < \infty$, 所以存在 $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$ 使 $g^a = g^b$. 于是 $g^{b-a} = 1$. 因此存在

$$l := \min\{m \in \mathbb{N} \,|g^m = 1\}.$$

如果 $g^i = g^j$, 其中, $0 \leqslant i < j \leqslant l-1$, 那么 $g^{j-i} = 1$, 这与 l 的极小性矛盾. 于是所有的元 $1, g, \cdots, g^{l-1}$ 均互不相同. 因为每一个整数 $z \in \mathbb{Z}$ 都可以表示为

$$z = lt + r, \text{ 其中}, t \in \mathbb{Z}, r \in \{0, 1, \cdots, l-1\},$$

① 设 $d := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $t := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 可以证明 G 是在 $\{1, 2, 3\}$ 上的置换群, 即对称群 S_3(见4.3节).

得

$$g^z = g^{lt} g^r = (g^l)^t g^r = g^r.$$

因此 $G = \{1, g, \cdots, g^{l-1}\}$, $l = n$. 同理可证 (a) 与 (b), 从而得出 (c). □

G 的一个非空子集 U 称为 G 的一个**子群** (subgroup), 如果 U 对于 G 的乘法是一个群. 这显然等价于说, 对所有的 $x, y \in U$, xy 和 x^{-1} 都在 U 中. 把 U 是 G 的子群记为 $U \leqslant G$. 进一步, 如果 $U \neq G$, 那么 U 称为 G 的**真子群** (proper subgroup), 记为 $U < G$. 每一个群都有一个**平凡子群** (trivial subgroup) $U = \{1\}$, 为简便起见可记为 $U = 1$.

显而易见, G 的任一组子群的交也是 G 的一个子群.

对于 G 的一个子群 $U \neq 1$, 如果没有其他 G 的非平凡的子群真包含在 U 中, 那么 U 称为 G 的**极小** (minimal) **子群**. 对于 G 的一个子群 $U \neq G$, 如果 U 不包含在 G 的任何其他真子群中, 那么 U 就称为 G 的**极大** (maximal) **子群**.

显然, 每一个非平凡的有限群都有极小和极大子群.

1.1.3　设 U 是 G 的一个非空有限子集. 若对所有的 $x, y \in U$ 都有 $xy \in U$, 则 U 为 G 的一个子群.

证明　因为 U 是有限集, 对 $x \in U$, U 到自身上的映射 $\varphi: u \mapsto ux$ 既是单射又是满射. 于是 $1 = x^{\varphi^{-1}} \in U$, $x^{-1} = 1^{\varphi^{-1}} \in U$. □

对 G 的一个非空子集 X, 定义

$$\langle X \rangle := \{x_1^{z_1} \cdots x_j^{z_j} | x_i \in X, z_i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$$

为由 X **生成**的子群. 记 $\langle \varnothing \rangle := 1$. 在 X 是有限集 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 的特殊情形, 也记

$$\langle X \rangle = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle.$$

如果 $\mathcal{X} = \{X_1, \cdots, X_n\}$ 是 G 的子集的有限集合, 可记为

$$\langle \mathcal{X} \rangle := \langle X_1, \cdots, X_n \rangle := \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right\rangle.$$

1.1.4　设 X 是 G 的一个子集, 则 $\langle X \rangle$ 是 G 的一个子群. 更确切一点, $\langle X \rangle$ 是 G 的包含 X 的最小子群.

证明　如果 $a, b \in \langle X \rangle$, 那么 ab, a^{-1} 也在 $\langle X \rangle$ 中. 于是 $\langle X \rangle$ 是一个子群. G 的每一个包含 X 的子群均包含 $\langle X \rangle$. □

在一些情况下, 生成集 X 的性质已经确定 $\langle X \rangle$ 的结构. 例如, 如果对所有的 $x, y \in X \subseteq G$ 有 $xy = yx$, 那么 $\langle X \rangle$ 是一个交换群.

设 $g \in G$. 循环子群 $\langle g \rangle$ 是 G 的包含 g 的最小子群. 如果 $\langle g \rangle$ 是有限的, 那么

$$o(g) := |\langle g \rangle|$$

是 g 的**阶** (order). 根据 1.1.2, $o(g)$ 是使 $g^n=1$ 最小的正整数 n.

对 G 的两个非空子集 A,B, 令

$$AB:=\{ab|a\in A,b\in B\},\quad A^{-1}:=\{a^{-1}|a\in A\}.$$

称 AB 是 A 和 B 的**乘积** (complex product)(或简称为积). 乘积的定义表明 G 的非空子集的乘法满足结合律, 并且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

当 $A=\{a\}$ 或 $B=\{b\}$ 时, 把 AB 分别记为 aB 或 Ab, 且对 $g\in G$, 记

$$B^g:=g^{-1}Bg,$$

称 B^g 为 B 在 G 中的**共轭** (conjugate), 确切地说, B^g 为 B 在 g 下的共轭. 对任意 $A\subseteq G$, 记

$$B^A:=\{B^a|a\in A\}.$$

注意到对 G 的非空子集 U 有

$$U\leqslant G\Leftrightarrow UU=U=U^{-1}.$$

1.1.5 设 A 和 B 是 G 的子群, 则 AB 是 G 的子群当且仅当 $AB=BA$.

证明 由 $AB\leqslant G$, 得

$$(AB)=(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=BA.$$

如果 $AB=BA$, 那么

$$(AB)(AB)=A(BA)B=A(AB)B=AABB=AB$$

且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=BA=AB.$$

于是 $AB\leqslant G$. □

1.1.6 设 A 和 B 是 G 的有限子群, 则

$$|AB|=\frac{|A||B|}{|A\cap B|}.$$

证明 在 Cartesian(笛卡儿) 积 $A\times B$ 上定义一个等价关系

$$(a_1,b_1)\sim(a_2,b_2)\Leftrightarrow a_1b_1=a_2b_2.$$

于是 $|AB|$ 是 $A \times B$ 中等价类的个数. 设 $(a_1, b_1) \in A \times B$. 由于

$$a_2b_2 = a_1b_1 \Leftrightarrow a_1^{-1}a_2 = b_1b_2^{-1} (\in A \cap B)$$
$$\Leftrightarrow \text{ 存在 } d \in A \cap B \text{ 使 } a_2 = a_1d, b_1 = db_2.$$

在等价类

$$\{(a_2, b_2) | a_1b_1 \sim a_2b_2\}$$

中恰好包含 $|A \cap B|$ 个元素. 于是结论得证. □

设 U 是 G 的子群且 $x \in G$. 乘积

$$Ux = \{ux | u \in U\} \text{ 与 } xU = \{xu | u \in U\}$$

分别是 U 在 G 中的**右陪集** (right coset)与**左陪集** (left coset). 对应

$$Ux \mapsto (Ux)^{-1} = x^{-1}U$$

定义了一个从 U 的右陪集的集合到左陪集的集合之间的双射. 如果 U 在 G 中的右陪集之集是有限的, 那么 U 在 G 中的右陪集数称为 U 在 G 中的**指数** (index), 记为 $|G : U|$ ①.

因为 $u \mapsto ux$ 是从 U 到 Ux 的双射 (见 1.1.1), 对所有的 $x \in G$, 都有

$$|U| = |Ux| = |xU|.$$

又因为

$$x = 1_G x \in Ux,$$

U 的右陪集覆盖集合 G, 且对 $y, x \in G$ 有

$$Ux = Uy \Leftrightarrow yx^{-1} \in U \Leftrightarrow y \in Ux.$$

因此, U 的任何两个右陪集或者相同或者不相交②.

于是得到下面的定理:

1.1.7　Lagrange(拉格朗日)定理③　设 U 是有限群 G 的一个子群, 则

$$|G| = |U||G : U|.$$

---

① 如同右陪集一样, 下述命题对左陪集也成立.

② U 的右陪集是如下等价关系:

$$y \sim x \Leftrightarrow yx^{-1} \in U$$

的等价类.

③ 参照文献 [75] 和 [42].

特别地, 整数 $|U|$ 和 $|G:U|$ 都是 $|G|$ 的因子*. □

因为对所有的 $g \in G$ 都有 $\langle g \rangle$ 是 G 的子群, 从 1.1.7 即得

1.1.8 对于任意一个有限群 G 和任意的 $g \in G$, g 的阶整除 $|G|$. □

设 $U \leqslant G, S \subseteq G$. 如果 S 恰包含每一个右陪集 $Ux(x \in G)$ 中的一个元素, 那么称 S 是 U 在 G 中的**代表系** (transversal) ①; 如果 S 恰包含 U 在 G 中的每一个左陪集中的一个元素, 那么 S 是 U 在 G 中的**左陪集代表系** (left transversal).

1.1.9 设 $S \subseteq G$, 则 S 是子群 U 在 G 中的一个代表系当且仅当 $G = US$ 且对 S 中任意的 $s \neq t$ 有 $st^{-1} \notin U$.

如果 S 是 U 在 G 中的代表系, 那么映射

$$U \times S \to G, \text{其中}, (u, s) \mapsto us$$

是双射.

证明 $Us = Ut \Leftrightarrow st^{-1} \in U$. □

下面是一个重要的特殊情况:

1.1.10 设 U 和 S 是 G 的子群且 $G = US, U \cap S = 1$, 那么 S 是 U 在 G 中的代表系. □

这样的群 S 称为 U 在 G 中的**补**(complement).

下面的结论经常用到:

1.1.11 Dedekind(戴德金)恒等式 设 $G = UV$, 其中, U, V 是 G 的子群. 那么每一个满足条件 $U \leqslant H \leqslant G$ 的子群 H 都可分解为 $H = U(H \cap V)$.

证明 U 在 G 中的每一个陪集与 U 在 H 中的每一个陪集都包含 V 中的一个元素. □

根据 Lagrange 定理, 有限群 G 的阶的因子是 G 的重要的不变量.

设 $\mathbb{P}$ 是所有正素数的集合, 对 $n \in \mathbb{N}$ 记

$$\pi(n) := \{p \in \mathbb{P} | \ p \text{ 整除 } n\}.$$

对有限群 G, 定义

$$\pi(G) := \pi(|G|).$$

对 $x \in G$, 如果 $o(x)$ 是 p 的幂则称 x 为 **p 元素** (p-element)($p \in \mathbb{P}$); 如果 $\pi(G) = \{p\}$, 即 $|G|$ 是 p 的幂, 则称 G 为 **p 群** (p-group). 对每一个 $p \in \mathbb{P}$, 把单位元 (单位群) 看成是 p 元素 (p 群). 如果群 G 的一个子群是 p 群, 那么这个子群叫做 G 的 **p 子群** (p-subgroup).

---

* Lagrange 定理的逆一般不成立.—— 译者注

① 也称 U 在 G 中的**右陪集代表系**(set of right coset representatives).

从 1.1.8 得到 p 群的每一个元都是 p 元素, 其逆也成立. 这是 Cauchy(柯西) 定理的一个结论 (见 3.2.1).

习　　题

下设 A, B, C 是有限群 G 的子群.

1. 如果 $B \leqslant A$, 则 $|A:B| \geqslant |C\cap A : C\cap B|$.

2. 设 $B \leqslant A$. 如果 $x_1, \cdots, x_n$ 是 A 在 G 中的代表系, $y_1, \cdots, y_m$ 是 B 在 A 中的代表系, 则 $\{y_j x_i\}_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,m}}$ 是 B 在 G 中的代表系.

3. $|G : A\cap B| \leqslant |G:A||G:B|$.

4. $A\cup B$ 是 G 的一个子群, 当且仅当 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$.

5. 设对某 $g\in G$ 有 $G = AA^g$, 则 $G = A$.

6. 设 $|G|$ 是一个素数, 那么 1 和 G 是 G 仅有的两个子群.

7. G 的阶是偶数当且仅当 G 中对合① 的个数是奇数.

8. 如果对所有的 $y\in G$ 都有 $y^2 = 1$, 则 G 是交换群.

9. 设 $|G| = 4$, 则 G 是交换群且包含一个 2 阶子群.

10. 如果 G 恰有一个极大子群, 那么 G 是循环群.

11. 假设 $A \neq 1$ 且对所有的 $g \in G\setminus A$ 都有 $A\cap A^g = 1$, 则

$$\left|\bigcup_{g\in G} A^g\right| \geqslant \frac{|G|}{2} + 1.$$

12. 如果 $A \neq G$, 那么 $G \neq \bigcup\limits_{g\in G} A^g$.

13. 设 $A^G = \{A_1, \cdots, A_n\}$, 则 $\langle A_1, \cdots, A_n\rangle = A_1 \cdots A_n$.

1.2　同态和正规子群

设 G 和 H 是群. 称映射

$$\varphi : G \to H$$

(可以写为 "指数" 形式 $x \mapsto x^\varphi$) 是一个从 G 到 H 的**同态** (homomorphism), 如果它满足

$$\text{对所有的 } x, y\in G, \text{ 有 } (xy)^\varphi = x^\varphi y^\varphi.$$

1.2.1　如果同态 $\varphi : G\to H$ 是双射, 那么它的逆映射 φ^{-1} 也是一个同态.

证明　由

$$(x^{\varphi^{-1}} y^{\varphi^{-1}})^\varphi = (x^{\varphi^{-1}})^\varphi (y^{\varphi^{-1}})^\varphi = xy, \quad x, y\in H$$

---

① 对合是阶为 2 的元素; 见 27 页.

得到等式

$$x^{\varphi^{-1}}y^{\varphi^{-1}}=(xy)^{\varphi^{-1}}.$$ □

设 φ 是从 G 到 H 的同态, $X\subseteq G, Y\subseteq H$. 记

$$X^{\varphi}:=\{x^{\varphi}|x\in X\},\quad Y^{\varphi^{-1}}:=\{g\in G|g^{\varphi}\in Y\},$$

$$\operatorname{Ker}\varphi:=\{x\in G|x^{\varphi}=1_H\},\quad \operatorname{Im}\varphi:=G^{\varphi}.$$

称 X^{φ} 为 X 的**像** (image), $Y^{\varphi^{-1}}$ 为 Y(关于 φ) 的**逆像**(inverse image). 进一步, 称 $\operatorname{Ker}\varphi(=1_H^{\varphi^{-1}})$ 为 φ 的**核** (kernel), 而 $\operatorname{Im}\varphi$ 为 φ 的像.

如果 $\operatorname{Im}\varphi=H$, 则同态 φ 叫做**满同态**(epimorphism), 如果 $H=G$, 则称为**自同态**(endomorphism), 如果 φ 是单映射, 则同态 φ 叫做**单同态**(monomorphism), 如果 φ 是双射, 则称为**同构**(isomorphism), 如果 φ 是双射又是自同态, 则称为**自同构**(automorphism).

如果 φ 是一个同构, 那么称 G 同构于 H; 记为 $G\cong H$.

下面的结论可从群的公理直接得到:

- $(1_G)^{\varphi}=1_H$.
- 对所有的 $x\in G$ 有 $(x^{-1})^{\varphi}=(x^{\varphi})^{-1}$①.
- 如果 U 是 G 的子群, 那么 U^{φ} 是 H 的子群.
- 如果 V 是 H 的子群, 那么 $V^{\varphi^{-1}}$ 是 G 的子群.
- 对 $X\subseteq G$ 有 $\langle X\rangle^{\varphi}=\langle X^{\varphi}\rangle$.

1.2.2 设 $N=\operatorname{Ker}\varphi$, 则对所有的 $x\in G$ 有

$$Nx=\{y\in G|y^{\varphi}=x^{\varphi}\}=xN.$$

证明

$$\begin{aligned}y^{\varphi}=x^{\varphi}&\Leftrightarrow y^{\varphi}(x^{\varphi})^{-1}=1\Leftrightarrow y^{\varphi}(x^{-1})^{\varphi}=1\\&\Leftrightarrow (yx^{-1})^{\varphi}=1\Leftrightarrow yx^{-1}\in N\\&\Leftrightarrow y\in Nx.\end{aligned}$$

同样地, 有

$$y^{\varphi}=x^{\varphi}\Leftrightarrow (x^{\varphi})^{-1}y^{\varphi}=1\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow y\in xN.$$

□

设 N 是 G 的一个子群. 若

① 常把 $(x^{\varphi})^{-1}$ 写成 $x^{-\varphi}$.

$$对所有的\ x \in G\ 都有\ Nx = xN,$$

则称 N 为 G 的**正规子群** (normal subgroup) (或 N 在 G 中**正规** (normal)). 把 N 在 G 中正规记为 $N \trianglelefteq G$. 如果 N 在 G 中正规, 那么 N 的任意一个右陪集也是 N 的一个左陪集, 于是可简单地称为 N 在 G 中的**陪集** (coset). 因为

$$Nx = xN \Leftrightarrow N = x^{-1}Nx (= N^x),$$

可以得到

1.2.3　子群 N 在 G 中正规当且仅当对所有的 $y \in N$ 和 $x \in G$ 都有 $y^x \in N$. □

群 G 本身是 G 的一个正规子群. 此外, G 总有一个**平凡正规子群** (trivial normal subgroup) 1. 如果 $G \neq 1$ 且 G 和 1 是 G 仅有的正规子群, 那么 G 称为**单群** (simple group). 例如, 素数阶群就是单群 (见 1.1.7).

下面的结论是经常要用到的, 它们可以直接从正规子群的定义得到.

- 对 G 的每一个同态 φ, G (G^φ) 的任一个正规子群的像 (逆像) 都在 $G^\varphi(G)$ 中正规.
- G 的任两个正规子群的积与交都在 G 中正规.
- 如果 $U \leqslant G$, $N \trianglelefteq G$, 那么 $N \cap U \trianglelefteq U$.
- 如果 $U \leqslant G$, 那么

$$U_G := \bigcap_{g \in G} U^g$$

　是 G 的包含在 U 中的最大的正规子群.

- 如果 $X \subseteq G$, 那么 $\langle X^G \rangle$ 是 G 的包含 X 的最小的正规子群.

设 N 是 G 的正规子群, G/N 是 N 在 G 中的所有陪集的集合. 对 $Nx, Ny \in G/N$ 有

$$(Nx)(Ny) = N(xN)y = N(Nx)y = Nxy.$$

于是有

(*) $(Nx)(Ny) = Nxy$, 对所有的 $x, y \in G$.

因此, 这个乘积在 G/N 上定义了一个具有结合律的乘法. 显然 $N = N1_G$ 是 G/N(关于这个乘法) 的单位元, 而 Nx^{-1} 是 Nx 的逆. 于是有

1.2.4　设 N 是 G 的正规子群. 那么 G/N 关于上面定义的乘积 (*) 是一个群. 映射

$$\psi : G \to G/N, \quad x \mapsto Nx$$

是一个满同态. □

1.2.4 的第 2 部分由 (*) 得到.

1.2.4 所描述的群 G/N(读作 G 模 N) 叫做 G 对 N 的**商群** (**或因子群**, factor group), 而相应的映射 ψ 称为从 G 到 G/N 的**自然同态** (natural homomorphism).

由 1.2.2, G 的正规子群正好就是 G 的同态的核. 从 1.2.2 和 1.2.4 可以推出下面的定理:

1.2.5 同态定理 设 φ 是从 G 到 H 的同态. 那么

$$G/\mathrm{Ker}\,\varphi \to H, \text{ 其中, } (\mathrm{Ker}\,\varphi)x \mapsto x^\varphi$$

是单同态. 特别地,

$$G/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi. \qquad \square$$

设 $U \leqslant G, N \trianglelefteq G$. 那么由 1.1.5, UN 是 G 的一个子群且 N 是 UN 的一个正规子群.

下面的两个**同构定理**是 1.2.5 的直接推论:

1.2.6 设 $U \leqslant G, N \trianglelefteq G$. 那么

$$\varphi : U \to UN/N, \text{ 其中, } u \mapsto uN$$

是一个满同态, 其核 $\mathrm{Ker}\,\varphi = U \cap N$, 并且

$$U/U \cap N \cong UN/N. \qquad \square$$

1.2.7 设 N, M 是 G 的正规子群且 $N \leqslant M$. 那么

$$\varphi : G/N \to G/M, \text{ 其中, } Nx \mapsto Mx$$

是核 $\mathrm{Ker}\,\varphi = M/N$ 的满同态且

$$(G/N)/(M/N) \cong G/M. \qquad \square$$

注意, 重要的是, 同态定理给出了从 G 的包含 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 的子群的集合到 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 的子群的集合之间的一个双射 $(U \mapsto U^\varphi)$.

为了方便起见, 常用**上划线记号** (bar convention)来表示商群 G/N 的子群和元素

$$\overline{U} := UN/N, \text{ 其中, } U \leqslant G; \ \overline{x} := xN, \text{ 对于 } x \in G.$$

特别地, $\overline{G} = G/N$.

一般情况下, $A \trianglelefteq N \trianglelefteq G$ 并不蕴含 $A \trianglelefteq G$. 如果存在子群 $A_1, \cdots, A_d$ 使

$\mathcal{S} \quad A = A_1 \trianglelefteq A_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq A_{d-1} \trianglelefteq A_d = G,$
则称子群 A 是 G 的**次正规子群**(subnormal subgroup)(或在 G 中**次正规**(subnormal)), 记为 $A \trianglelefteq \trianglelefteq G$, 把 $\mathcal{S}$ 叫做从 A 到 G 的**次正规列** (subnormal series). 显然有

$$A \trianglelefteq \trianglelefteq B \trianglelefteq \trianglelefteq G \Rightarrow A \trianglelefteq \trianglelefteq G.$$

由于具有传递性质, 次正规性在有限群的研究中起着重要的作用. 我们将从第 5 章开始用这个概念. 这里只给出从次正规定义直接得出的一些基本性质.

1.2.8　设 A, B 是 G 的次正规子群.

(a) 对 $U \leqslant G$ 有 $U \cap A \trianglelefteq \trianglelefteq U$.

(b) $A \cap B \trianglelefteq \trianglelefteq G$.

(c) 设 φ 是 G 的一个同态, 那么 G (G^φ) 的任何次正规子群的像 (逆像) 都次正规于 G^φ (G).

证明　(a) 设 $\mathcal{S}$ 是 A 到 G 的次正规列. 那么

$$U \cap A = U \cap A_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq U \cap A_{d-1} \trianglelefteq U \cap A_d = U$$

是一个从 $U \cap A$ 到 U 的次正规列.

(b) 由 (a) 可得到 $A \cap B \trianglelefteq \trianglelefteq B \trianglelefteq \trianglelefteq G$.

(c) 此结论可从有关正规子群的相应结论得到. □

设 $B \trianglelefteq A \leqslant G$, 那么 A/B 叫做 G 的一个**截断**(section).

习　　题

下设 G 是一个群.

1. 每一个指数为 2 的子群都在 G 中正规.

2. 证明恰有两个不同构的 4 阶群, 并写出它们的群表.

3. 设 N 是 G 的正规子群且 $|G : N| = 4$.

(a) G 包含一个指数为 2 的正规子群.

(b) 如果 G/N 非循环, 那么 G 中存在 3 个真正规子群 A, B 与 C 使得 $G = A \cup B \cup C$.

4. 设 G 是一个单群, $|G| \neq 2$ 且 φ 是从 G 到 H 的同态. 如果 H 包含一个指数是 2 的正规子群 A, 那么 $G^\varphi \leqslant A$.

5. 设 $x \in G$, $D := \{x^g | g \in G\}$, $U_i \leqslant G\,(i = 1, 2)$. 假设

$$\langle D \rangle = G \text{ 且 } D \subseteq U_1 \cup U_2,$$

则有 $U_1 = G$ 或 $U_2 = G$.

6. 设 $G \neq 1$ 是一个有限群. 假设 G 的每一个真子群都是交换群, 则 G 包含一个非平凡的交换正规子群.

1.3 自 同 构

本节中, G 表示一个群. G 的所有自同构的集合 Aut G, 关于下面规定的乘法:

$$\alpha\beta : x \mapsto (x^\alpha)^\beta, \quad x \in G,\ \alpha, \beta \in \text{Aut } G$$

构成一个群, 称为 G 的**自同构群**(automorphism group). 单位映射是 $\operatorname{Aut} G$ 的单位元, α 的逆是逆映射 α^{-1}(见 1.2.1).

群的自同构把有限子群 (元) 映射到同阶的子群 (元) 上. 对 $a \in G$, 由 1.1.1, 映射

$$\varphi_a : G \to G, \text{其中}, x \mapsto x^a \ (= a^{-1}xa)$$

是一个双射. 因为

$$(xy)^a = a^{-1}xaa^{-1}ya = (a^{-1}xa)(a^{-1}ya) = x^a y^a,$$

所以 φ_a 是 G 的自同构. 称为由 a 诱导的**内自同构**(inner automorphism).

由于

$$x^{ab} = b^{-1}a^{-1}xab = (x^a)^b,$$

由 $a \mapsto \varphi_a$ 给出的映射

$$\varphi : G \to \operatorname{Aut} G$$

是从 G 到 $\operatorname{Aut} G$ 的同态.

因此 G 的内自同构集

$$\operatorname{Inn} G := \{\varphi_a | a \in G\}$$

是 $\operatorname{Aut} G$ 的子群, 并且等式

$$\beta^{-1}\varphi_a\beta = \varphi_{a^\beta}, \quad \beta \in \operatorname{Aut} G,\ a \in G$$

表明 $\operatorname{Inn} G$ 是 $\operatorname{Aut} G$ 的一个正规子群

设

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{x \in G | x^a = x,\ \forall a \in G\} =: Z(G).$$

由同态定理得

$$G/Z(G) \cong \operatorname{Inn} G.$$

子群 $Z(G)$ 称为 G 的**中心**(center).

为了以后的应用, 证明如下的:

1.3.1 假设 $G/Z(G)$ 为循环, 那么 G 是交换群.

证明　因为 $G/Z(G)$ 是循环的, 所以存在 $g \in G$ 使 $G/Z(G) = \langle gZ(G) \rangle$. 于是

$$G = Z(G)\langle g \rangle.$$

又因 $\langle g \rangle$ 是交换群, 所以 G 的任何两个元素都交换, G 是交换群. □

由定义, G 的子群 N 是一个正规子群当且仅当

$$N^a = N, \quad \forall a \in G.$$

于是 G 的一个子群是正规的当且仅当它被 G 的每一个内自同构映射到自身.

G 的一个子群 U 称为 G 的**特征子群**(characteristic subgroup)(或称 U 在 G 中**是特征的**(characteristic)), 如果有

$$U^\alpha = U, \quad \forall \alpha \in \operatorname{Aut} G.$$

此时, 记为 U char G.

显然, G 的特征子群在 G 中正规. 1 和 G 是 G 的特征子群, $Z(G)$ 也是 G 的一个特征子群. 事实上, 对 $x \in Z(G)$, $g \in G$, $\alpha \in \operatorname{Aut} G$,

$$x^\alpha g^\alpha = (xg)^\alpha = (gx)^\alpha = g^\alpha x^\alpha,$$

并且因为 $G = \{g^\alpha | g \in G\}$, 有 $x^\alpha \in Z(G)$.

下面给出两个常用的特征子群的性质:

1.3.2　设 N 是 G 的正规子群, 而 A 是 N 的特征子群, 则

(a) A 在 G 中正规.

(b) 如果 N 在 G 中特征, 那么 A 在 G 中也特征.

证明　(a) 设 $a \in G$, φ_a 是由 a 诱导的 G 的内自同构, 则因 N 正规于 G, φ_a 在 N 上的限制是 N 的自同构. 因此对所有的 $a \in G$, A 在 φ_a 的作用下是不变的, 即 A 在 G 中正规.

(b) 因此时 N 在 G 中特征, 用 G 的任一个自同构替代上述证明中的 φ_a 即可得结论. □

上面的性质 (b) 显示了特征性 (如同次正规性那样, 见 12 页) 具有传递性质.

现在, 介绍一个非常有用的概念.

设是 X 一个群,

$$\varphi : X \to \operatorname{Aut} G$$

是一个从 X 到 $\operatorname{Aut} G$ 的同态, 则称 X(关于 φ)**作用在**(act on)G **上**. 令

$$g^x := g^{x^\varphi},$$

则对所有的 $g, h \in G$ 和 $x, y \in X$, 有

$$(gh)^x = g^x h^x, \quad (g^x)^y = g^{xy}.$$

设 $U \leqslant G$, 如果对所有的 $x \in X$ 都有

$$U^x := \{u^x | u \in U\} = U,$$

则称子群 U 是 **X 不变的** (X-invariant).

如果 U 是 G 的一个 X 不变子群, 那么 X 关于由 φ 所诱导的同态 $X \to \mathrm{Aut}(U)$ 作用在 U 上. 如果 N 是 G 的一个 X 不变正规子群, 那么 X 可以以如下方式:

$$(Ng)^x := Ng^x$$

作用在商群 G/N 上. 显而易见, $\mathrm{Aut}\, G$ 的每一个子群 (关于 $\varphi = \mathrm{id}$) 都作用在 G 上. 在 $X = \mathrm{Aut}\, G$(或 $X = \mathrm{Inn}\, G$) 时, X 不变子群即为 G 的特征 (或正规) 子群.

G 的每一个子群 X 关于 $\varphi|_X$ 作用在 G 上, 这里 φ 是定义在 13 页 (共轭) 的从 G 到 $\mathrm{Inn}\, G$ 的同态. 设 X 是 G 的一个子群, 当我们讲 X 不变子群而没有提及作用方式 φ 时, 总是指共轭作用.

设 η 是从 G 到 H 的同态, X 是作用在 G 和 H 上的群. 如果

$$(g^x)^\eta = (g^\eta)^x, \quad \forall g \in G, x \in X,$$

则称 η 是一个 **X 同态** (X-homomorphism)(用同样的方法可定义 X 同构和 X 自同构). 于是, X 同态把 G 的 X 不变子群映射 H 到的 X 不变子群, 而 H 的 X 不变子群的逆像是 G 的 X 不变子群. 特别地, $\mathrm{Ker}\, \eta$ 和 $\mathrm{Im}\, \eta$ 都是 X 不变子群.

例如, $X := G$ 共轭作用在 G 上, 也由

$$h^x := h^{x^\eta}, \quad h \in H, x \in G$$

作用在 H 上. 这意味着

$$(g^x)^\eta = (x^{-1}gx)^\eta = (g^\eta)^{x^\eta} = (g^\eta)^x.$$

于是 η 是一个 G 同态. 如果 η 是一个满射, H 的 G 不变子群恰是 H 的正规子群.

如果 $\eta: G \to H$ 是 X 同构映射, 记为 $G \cong_X H$.

在同态定理 1.2.5 和它的 2 个推论 1.2.6, 1.2.7 中引入 X 同态映射, 就有以下结论:

- 设 η 是 G 的 X 同态, 那么

$$G/\mathrm{Ker}\, \eta \cong_X \mathrm{Im}\, \eta.$$

• 设 U 和 N 是 G 的 X 不变子群, 那么

$$U/U\cap N \cong_X UN/N.$$

• 设 $N \leqslant M$ 是 G 的 X 不变正规子群, 那么

$$(G/N)/(M/N) \cong_X G/M.$$

习 题

下设 G 是一个群.

1. 设 N 是 G 的一个特征子群, 那么满足 $\alpha|_N = 1$ 的 G 的自同构 α 构成 $\mathrm{Aut}\, G$ 的一个正规子群.

2. G 的使 G 的所有的子群 U 满足 $U^\alpha = U$ 的自同构 α 构成 $\mathrm{Aut}\, G$ 的一个正规子群.

3. 设 $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$, $|\{x \in G | x^\alpha = x\}| > |G|/2$, 则 $\alpha = 1$.

4. 群 G 是交换群当且仅当映射

$$G \to G, \text{其中}, x \to x^{-1} (x \in G)$$

是 G 的一个自同构.

5. 设 G 是有限群, $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$ 满足 $x^\alpha \neq x = x^{\alpha^2}, \forall x \in G^*$, 则下述结论成立:

(a) 对每一个 $x \in G$ 都存在 $y \in G$ 使得 $x = y^{-1}y^\alpha$.

(b) G 是奇阶交换群.

6. 设 $N \trianglelefteq G$, $U \leqslant G$ 使 $G = NU$, 则存在一个保持包含关系的如下两个集合之间的双射: 从满足 $U \leqslant X \leqslant G$ 的子群 X 的集合到满足 $U \cap N \leqslant Y \leqslant N$ 的 U 不变子群 Y 的集合.

7. 设 G 是有限群且 $Z(G) = 1$, 令 $A := \mathrm{Aut}\, G$, $I := \mathrm{Inn}\, G$, 则

(a) $C_A(I) = 1$ ①.

(b) 假设 I 是 A 的一个特征子群, 即 $I = I^\alpha, \forall \alpha \in \mathrm{Aut}\, A$. 那么 $\mathrm{Aut}\, A = \mathrm{Inn}\, A$.

(c) 假设 G 是单群. 那么 $\mathrm{Aut}\, A = \mathrm{Inn}\, A$.

8. 设 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 是在复数域 $\mathbb{C}$ 上的所有 2×2 可逆矩阵组成的群, 令

$$G := \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

这个群称为 (8 阶)**四元数群**(quaternion group).

(a) $|G| = 8$.

(b) $|Z(G)| = 2$.

(c) $G \backslash Z(G)$ 的每一个元的阶为 4.

(d) G 恰含一个阶为 2 的元.

(e) G 的每一个子群都在 G 中正规.

(f) G 有一个 3 阶自同构.

---

① $C_A(I) := \{\alpha \in \mathrm{Aut}\, G | \alpha\beta = \beta\alpha, \forall \beta \in I\}$.

1.4 循 环 群

所有的有限循环群我们都在 1.1.2 中讨论过. 但因为存在循环群类的一个“泛对象”, 即整数加群 $\mathbb{Z}$, 我们可以从一个稍微更一般的观点来研讨循环群.

群 $\mathbb{Z}$ 是一个单位元为 $0 \in \mathbb{Z}$, 生成元是 $1 \in \mathbb{Z}$ 的无限循环群.

1.4.1 设 U 是 $\mathbb{Z}$ 的一个子群, 则存在某 $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, 使得

$$U = \{nz|z \in \mathbb{Z}\} =: n\mathbb{Z},$$

并且有

$$n\mathbb{Z} \leqslant m\mathbb{Z} \Leftrightarrow m|n.$$

证明 如果 $U = 0$ 那么 $U = 0\mathbb{Z}$; 所以可假设 $U \neq 0$. 设 $k \in U$, 则 $-k \in U$. 于是有极小值

$$n := \min\{i \in \mathbb{Z}|0 < i \in U\}$$

存在. 这样就存在整数 $z, r \in Z$ 使

$$k = zn + r, \quad r \in \{1, \cdots, n-1\}.$$

于是 $r = k - zn \in U$, 由 n 的极小性得 $r = 0$, 所以 $k = zn \in U$, $U = n\mathbb{Z}$.

后一个论断显然成立. □

设 $n \in \mathbb{N}$. 商群

$$C_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^{①}$$

是一个由模 n 的陪集

$$n\mathbb{Z},\ 1 + n\mathbb{Z}, \cdots, (n-1) + n\mathbb{Z}$$

构成的 n 阶循环群.

整数 $0, 1, \cdots, n-1$ 构成 $n\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{Z}$ 中的一个代表系.

设 $G = \langle g\rangle$ 是一个循环群 (写成乘法形式). 指数律表明

$$\varphi : \mathbb{Z} \to G, \text{其中}, z \mapsto g^z$$

是一个满同态. 由 1.4.1, 存在 $n \geqslant 0$ 使得

$$\operatorname{Ker}\varphi = n\mathbb{Z}.$$

如果 $n = 0$, 那么 G 同构于 $\mathbb{Z}$; 如果 $n \geqslant 1$, 那么 G 同构于 C_n(见第 11 页, 同态定理 1.2.5). 于是得到

① 以后我们对 C_n 上的群运算符号常用乘法记号.

1.4.2 n 阶循环群同构于 C_n. □

由同态 φ 和 1.4.1 的第 2 个结论, 得到下面的定理:

1.4.3 定理 设 $G = \langle g \rangle$ 是一个 n 阶循环群, $l_1, \cdots, l_k \in \mathbb{N}$ 是 n 的所有因子, 令

$$U_i := \langle g^{l_i} \rangle,$$

则 $U_1, \cdots, U_k$ 恰好是 G 的所有的子群且

(a) 如果 $n = n_i l_i$, 那么 U_i 是一个 n_i 阶子群 $(i = 1, \cdots, k)$.

(b) 设 $0 \neq z \in \mathbb{Z}$, 如果 $i \in \{1, \cdots, k\}$ 使 $l_i = (z, n)$ ①, 则 $\langle g^z \rangle = U_i$.

证明 G 的 (关于 φ 的) 子群对应于 $\mathbb{Z}$ 的包含 $n\mathbb{Z}$ 的子群. 于是由 1.4.1, 对应于 n 的因子. 因此 $U_1 = (l_1\mathbb{Z})^\varphi, \cdots, U_k = (l_k\mathbb{Z})^\varphi$ 是 G 仅有的子群.

(a) n_i 是 $\mathbb{N}$ 中使 $(g^{l_i})^m = 1$ 的整数 m 中最小的. 因此从 3 页 1.1.2 得 (a).

(b) 因为 $l_i | z$ 有 $g^z \in U_i$, 即 $\langle g^z \rangle \leqslant U_i$. 注意到存在整数 $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ 使 $l_i = nz_1 + zz_2$. 从而得到

$$g^{l_i} = g^{l_i}(g^{-n})^{z_1} = (g^z)^{z_2}.$$

于是 $U_i \leqslant \langle g^z \rangle$. □

作为一个推论, 在任一个有限循环群 G 中, 对 $|G|$ 的任一因子 m 恰好存在一个 m 阶子群. 因 G 的自同构映射把子群映射到同阶的子群上, 所以有

1.4.4 循环群的子群都是特征子群②. □

显然, 在 1.4.3 的情形下有

$$U_i \leqslant U_j \Leftrightarrow l_j | l_i.$$

对循环 p 群来说, 这意味着

1.4.5 设 $G = \langle g \rangle$ 是一个非平凡的 p^n 阶循环群, p 是一个素数, 则

$$1 < \langle g^{p^{n-1}} \rangle < \langle g^{p^{n-2}} \rangle < \cdots < \langle g^p \rangle < G$$

是 G 仅有的子群. 特别地, G 恰含一个极大子群和一个极小子群. □

注意到 1.4.5 的逆命题也是成立的: 恰好包含一个极大子群的有限群是一个素数幂阶循环群③. 与此不同的是, 恰好包含一个极小子群的有限群不一定循环; 可对照 36 页 2.1.7 和 90 页的 5.3.7.

在交换群 G 中, 每一个子群都是正规的. 如果又设 G 为单群, 则 G 是素数阶循环群.

---

① (z, n) 是 z 和 n 的**最大公因子**(greatest common divisor).

② 对 $\mathbb{Z}$ 而言, $z \mapsto -z$ 是 $\mathbb{Z}$ 仅有的非平凡自同构.

③ 见第 8 页习题 10.

1.4.6 素数阶循环群是仅有的交换单群. □

习 题

下设 G 是一个群.

1. 假设 $U \leqslant N \trianglelefteq G$, N 是一个循环群, 则 $U \trianglelefteq G$.
2. 设 p, q 是素数, G 是 pq 阶循环群. 那么 G 包含三个以上的子群当且仅当 $p \neq q$.
3. 设 G 是有限群. 假设 $|\{x \in G | x^n = 1\}| \leqslant n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 那么 G 是循环群.
4. 设 G 是有限群. 假设 G 的所有的极大子群共轭, 那么 G 是循环群.

1.5 换 位 子

对群 G 的任意两个元素 x, y, 定义

$$[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy \ \ (= y^{-x}y = x^{-1}x^{y})^{①}.$$

因为

$$xy = yx[x, y],$$

元素 $[x, y]$ 称为 x 和 y 的**换位子**(commutator), 有

$$[x, y]^{-1} = [y, x].$$

由所有换位子生成的子群

$$G' := \langle [x, y] | x, y \in G \rangle$$

称为 G 的**换位子群**(commutator subgroup).

1.5.1 设 φ 是 G 的一个同态. 那么对所有的 $x, y \in G$, 有

$$[x, y]^{\varphi} = [x^{\varphi}, y^{\varphi}].$$

因此 $(G')^{\varphi} = (G^{\varphi})'$. 特别地, G' 是 G 的一个特征子群. □

G' 的换位子群 G'' ② 也是 G 的特征子群 (见 1.3.2).

1.5.2 设 N 是 G 的正规子群, 那么

$$G/N \text{ 是交换群} \Leftrightarrow G' \leqslant N.$$

于是 G' 是使 G/N 为交换群的 G 的最小的正规子群 N.

证明 对 $x, y \in G$,

$$(xN)(yN) = (yN)(xN) \Leftrightarrow xyN = yxN \Leftrightarrow [x, y] \in N.$$ □

---

① $y^{-x} := (y^{-1})^{x}$.

② 就是说 $G'' := (G')'$.

群 G 称为**完备的**(perfect), 如果 $G = G'$. 在 6.5 节需要

1.5.3　设 N 是 G 的交换正规子群, 如果 G/N 是完备的, 那么 G' 也是完备的.

证明　把 1.5.1 运用到自然同态上, 得到

$$G/N = (G/N)' = G'N/N.$$

于是 $G = G'N$. 因为 $G'/N \cap G'$ ($\cong G/N$) 也是完备的, 同样可得到 $G' = G''(N \cap G')$. 从而有 $G = G''N$ 且 $G/G'' \cong N/N \cap G''$. 因为 N 是 G 的交换子群, 由 1.5.2 得到 $G' = G''$. □

对 $x, y, z \in G$, 定义

$$[x, y, z] := [[x, y], z],$$

对子集 $X, Y, Z \subseteq G$, 定义

$$[X, Y] := \langle [x, y] | x \in X, y \in Y \rangle,$$

$$[X, Y, Z] := [[X, Y], Z].$$

常用换位子来表示下面的基本性质:

• 对 G 的子集 X, Y 有

$$[X, Y] = 1 \Leftrightarrow xy = yx, \forall x \in X, y \in Y.$$

• 对 G 的子群 X, Y 有

$$[X, Y] \leqslant Y \Leftrightarrow Y \text{ 是 } X \text{ 不变的}.$$

于是对 G 的正规子群 N 和 M 来说有

• $[N, M] \leqslant N \cap M$.

我们常会用到下面的换位子的关系, 这些关系的证明是容易的.

1.5.4　对 $x, y, z \in G$,

$$[x, yz] = [x, z][x, y]^z, \quad [xz, y] = [x, y]^z[z, y]. \qquad \square$$

1.5.5　对 G 的子群 X 和 Y, 子群 $[X, Y]$ 在 $\langle X, Y \rangle$ 中正规.

证明　对 $x, z \in X$, $y \in Y$, 由 1.5.4 得

$$[x, y]^z = [xz, y][z, y]^{-1} \in [X, Y];$$

对 $z \in Y$, 同样可得 $[x, y]^z \in [X, Y]$. □

下面一个稍复杂的关系式也可以较容易地验证:

$$[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x=1\ (x,y,z\in G)^{①}.$$

我们常以下面的形式来表述上面的关系式:

1.5.6 三子群引理 设 X,Y,Z 是 G 的子群, 假设 $[X,Y,Z]=[Y,Z,X]=1$, 则有 $[Z,X,Y]=1$. □

习 题

下设 G 是群, $x\in G$, $C_G(x):=\{y\in G|yx=xy, x\in G\}$. 显然, $C_G(x)$ 是 G 的子群.

1. 设 A 是 G 的交换正规子群且 $x\in G$.

(a) 由 $a\mapsto[a,x]$ 定义的映射 $A\to A$ 是一个同态映射.

(b) $[A,\langle x\rangle]=\{[a,x]|a\in A\}$.

2. 设 A 和 x 同 1 题. 假如对所有的 $a\in A$ 有 $G=AC_G(ax)$, 那么 $[A,G]=[A,\langle x\rangle]$.

3. 设 $|G|=p^n$, p 为素数且 $\forall x\in G$, $|G:C_G(x)|\leqslant p$.

(a) $C_G(x)\trianglelefteq G$, $\forall x\in G$.

(b) $G'\leqslant Z(G)$.

(c) (Knoche, [74]) $|G'|\leqslant p$.

4. 设 $\alpha\in \mathrm{Aut}\,G$. 假设 $\forall x\in G$, $x^{-1}x^{\alpha}\in Z(G)$, 则 $x^{\alpha}=x$, $\forall x\in G'$.

5. (Ito, [70]) 设 $G=AB$, 其中, A 和 B 是 G 的交换子群, 则 G' 是交换群.

6. (Burnside, [4], p90) 设 A 是 G 的正规子群. 假设 $G\backslash A$ 中的每一个元素的阶为 3. 那么对所有的 A 的交换子群 B 和所有的 $x\in G\backslash A$ 有 $[B,B^x]=1$.

1.6 群 积

研讨群的积有两重意义. 一方面, 可以用于从已知的群构造新的群 (外积 (external products)). 另一方面, 可以用来描述群的结构 (内积 (internal products)). 已经学习过的两个子群 A 和 B 的乘积 AB 就是一个内积. 事实上, 如果 $AB=BA$, 那么 AB 也是群 (见 1.1.4).

设 $G_1,\cdots,G_n$ 是群, 集合 G_i 的**笛卡儿积**(Cartesian product)

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} G_i:=G_1\times\cdots\times G_n:=\{(g_1,\cdots,g_n)|g_i\in G_i\}$$

关于分量乘法

$$(g_1,\cdots,g_n)(h_1,\cdots,h_n):=(g_1h_1,\cdots,g_nh_n)$$

是一个群.

① 见文献 [100] 和文献 [64].

这个群是群 $G_1, \cdots, G_n$ 的 (外)直积((external) direct product).

显然, 对 $j = 1, \cdots, n$, 嵌入

$$\varepsilon_j : G_j \to \mathop{\times}_{i=1,\cdots,n} G_i, \text{ 其中}, g \mapsto (1, \cdots, 1, \underset{j}{g}, 1, \cdots, 1)$$

是从 G_j 到

$$G_j^* := \{(g_1, \cdots, g_n) | g_i = 1, i \neq j\}$$

的同构映射.

对 $G := \mathop{\times}_{i=1,\cdots,n} G_i$ 的子群 $G_1^*, \cdots, G_n^*$ 有如下结论:

$\mathcal{D}_1$　$G = G_1^* \cdots G_n^*$,

$\mathcal{D}_2$　$G_i^* \trianglelefteq G, i = 1, \cdots, n$,

$\mathcal{D}_3$　$G_i^* \cap \prod_{j \neq i} G_j^* = 1, \ i = 1, \cdots, n.$

反过来, 有

1.6.1　设群 G 有子群 $G_1^*, \cdots, G_n^*$ 使条件 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ 成立. 那么映射

$$\alpha : \mathop{\times}_{i=1}^{n} G_i^* \to G, \text{ 其中}, (g_1, \cdots, g_n) \mapsto g_1 \cdots g_n$$

是一个同构.

证明　$\mathcal{D}_1$ 表明 α 是一个满射. 由 $\mathcal{D}_2$ 得到

$$[G_i^*, G_k^*] \leqslant G_i^* \cap \prod_{j \neq i} G_j^*, \quad i \neq k.$$

于是由 $\mathcal{D}_3$ 有 $[G_i^*, G_k^*] = 1$. 对 $h_i, g_i \in G_i^*, i = 1, \cdots, n$, 即有

$$(g_1 \cdots g_n)(h_1 \cdots h_n) = (g_1 h_1) \cdots (g_n h_n);$$

因此 α 是一个同态. 设 $(g_1, \cdots, g_n) \in \operatorname{Ker} \alpha$, 即 $g_1 \cdots g_n = 1$. 那么再由 $\mathcal{D}_3$ 得

$$g_i = \prod_{j \neq i} g_j^{-1} \in G_i^* \cap \prod_{j \neq i} G_j^* = 1,$$

所以 $\operatorname{Ker} \alpha = 1$. 于是 α 是一个同构. □

如果对群 G 和子群 $G_1^*, \cdots, G_n^*$ 条件 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ 和 $\mathcal{D}_3$ 成立, 则称 G 为子群 $G_1^*, \cdots, G_n^*$ 的(内) **直积** ((internal) direct product)(概念的合理性已由 1.6.1 证明). 此时可写成

$$G = G_1^* \times \cdots \times G_n^* = \mathop{\times}_{i=1}^{n} G_i^*.$$

特别地, 有 $[G_i^*, G_j^*] = 1, i \neq j$, G 中每一个元素 g 可唯一地写成乘积

$$g = \prod_{i=1}^{n} g_i, \quad \text{其中}, g_i \in G_i^*.$$

我们已经研讨了直积的两种形式: 外直积和内直积. 前者是 (不一定不同的) 群的积, 后者是 (不同的) 子群的积. 通常, 外直积的因子 $G_1, \cdots, G_n$ 是两两不同的. 此时通过嵌入 ε_j 把 G_j 和 G_j^* 等同, 而不再区分内外直积.

1.6.2 设 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$.

(a) $Z(G) = Z(G_1) \times \cdots \times Z(G_n)$.

(b) $G' = G_1' \times \cdots \times G_n'$.

(c) 设 $N \trianglelefteq G$, $N_i = N \cap G_i$ $(i = 1, \cdots, n)$. 假设 $N = N_1 \times \cdots \times N_n$. 于是由

$$g = (g_1, \cdots, g_n) \mapsto (g_1 N_1, \cdots, g_n N_n)$$

确定的映射

$$\alpha : G = G_1 \times \cdots \times G_n \to G_1/N_1 \times \cdots \times G_n/N_n$$

是一个满同态且 $\operatorname{Ker}\alpha = N$. 特别地,

$$G/N \cong G_1/N_1 \times \cdots \times G_n/N_n.$$

(d) 如果因子 $G_1, \cdots, G_n$ 是 G 的特征子群, 那么

$$\operatorname{Aut} G = \operatorname{Aut} G_1 \times \cdots \times \operatorname{Aut} G_n.$$

证明 (a) 由 G 中分量相乘得 (a).

(b) 用 1.5.4, 由简单的归纳法就可证明 (b). 例如, 对 $n = 2$,

$$G' = [G_1G_2, G_1G_2] = \prod_{i,j}[G_i, G_j] = G_1' \times G_2'.$$

(c) 用 1.2.4 和 1.2.5 就可得到 (c).

(d) 如果 α_i 是 G_i 的自同构 $(i = 1, \cdots, n)$, 那么

$$(g_1, \cdots, g_n)^\alpha := (g_1^{\alpha_1}, \cdots, g_n^{\alpha_1})$$

定义了 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ 的一个自同构, 且

$$\varphi : \operatorname{Aut} G_1 \times \cdots \times \operatorname{Aut} G_n \to \operatorname{Aut} G, \text{其中}, (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \mapsto \alpha$$

是一个单同态, 并且如果因子 $G_1, \cdots, G_n$ 是 G 的特征子群, 则 φ 是满射. □

1.6.3 设 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ 且 N 是 G 的正规子群.

(a) 如果 N 是完备的, 那么 $N = (N \cap G_1) \times \cdots \times (N \cap G_n)$.

(b) 如果 $G_1, \cdots, G_n$ 是非交换单群, 那么存在子集 $J \subseteq \{1, \cdots, n\}$, 使

$$N = \mathop{\times}_{j\in J} G_j \text{ 且 } G_k \cap N = 1, \quad k \notin J.$$

证明 (a) 因为 $G_i \trianglelefteq G, N \trianglelefteq G$, 得到 $[N, G_i] \leqslant N \cap G_i$. 于是由 1.5.4 得

$$[N,G] = \prod_i [N, G_i] \leqslant \prod_i (N \cap G_i) =: N_0.$$

特别地, 由 $[N,N] \leqslant N_0$, $N' = N$ 得 $N = N_0$.

(b) 由正规子群 G_i 的单性可得 $G_i \leqslant N$ 或 $G_i \cap N = 1$. 所以, 如果 N 是完备的, 即可从 (a) 得 (b). 于是, 只要在 $|G|$ 上用归纳法证明 N 是完备的就足够了.

根据 1.6.2(b) 可假设 $G \neq N$. 因此, 存在 $k \in \{1, \cdots, n\}$ 使 $G_k \not\leqslant N$. 于是 $N \cap G_k = 1$, 从而 $NG_k = N \times G_k$. 设 $\overline{G} = G/G_k$. 由 1.6.2(c) 得 $\overline{G} = \mathop{\times}_{i\neq k} \overline{G}_i$, 由归纳假设 $\overline{N} = \overline{N}'$. 再由第 19 页 1.5.1 得 $N \times G_k = N' \times G_k$. 因此 $|N| = |N'|, N = N'$. □

对交换单群 $G_1, \cdots, G_n$, 1.6.3(b) 中的结论不成立. 例如, $C_2 \times C_2$ 包含 3 个极小 (正规) 子群.

下面的结果是由同态定理 1.2.5 所得出的一个结论. 它表明了外直积可用来给出群的内在结构.

1.6.4 设 $N_1, \cdots, N_n$ 是 G 的正规子群. 那么由

$$g \mapsto (g_1 N_1, \cdots, g_n N_n)$$

给出的映射

$$\alpha: G \to G/N_1 \times \cdots \times G/N_n$$

是一个具有 $\operatorname{Ker}\alpha = \bigcap_i N_i$ 的同态. 特别地, $G/\bigcap_i N_i$ 同构于 $G/N_1 \times \cdots \times G/N_n$ 的一个子群. □

通常有以下情形:

1.6.5 设 G 是正规子群 $G_1, \cdots, G_n$ 的积. 假设

$$(|G_i|, |G_j|) = 1, \quad i \neq j \in \{1, \cdots, n\},$$

则 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$.

证明 需要证明

$$D := \left(\prod_{j\neq i} G_j\right) \cap G_i = 1.$$

由 Lagrange 定理, $|D|$ 是 $|G_i|$ 和

$$k := \left|\prod_{j\neq i} G_j\right|$$

的一个因子.

重复用 1.1.6 可证明 k 是 $\prod_{j\neq i}|G_j|$ 的因子, 从而 $|D|$ 也是 $\prod_{j\neq i}|G_j|$ 的因子. 因此 k 和 $|G_i|$ 互素, 从而 $|D|=1$. □

这蕴含了下面的基本结论:

1.6.6 设 a,b 是有限群 G 的元素, 满足 $ab=ba$ 且 $(o(a),o(b))=1$, 则

$$\langle ab\rangle = \langle a\rangle \times \langle b\rangle,$$

且 $o(ab)=o(a)o(b)$.

证明 设 $k:=o(a)$, $m:=o(b)$. 注意到 $\langle a,b\rangle$ 是交换群, 其中, 子群 $\langle a\rangle$ 和 $\langle b\rangle$ 的阶是互素的. 因此

$$H:=\langle a,b\rangle = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$$

是阶为 mk 的群. 设 $g:=ab(\in H)$. 同态

$$\varphi:\langle g\rangle \to H/\langle a\rangle, \text{其中}, g^i \mapsto \langle a\rangle g^i = \langle a\rangle b^i$$

是满射. 因此 $|\mathrm{Im}\,\varphi|=m$ 是 $|\langle g\rangle|$ 的因子 (同态定理). 同理 k 是 $|\langle g\rangle|$ 的因子. 而由 $(m,k)=1$ 得 $o(g)=mk=|H|$, 即 $H=\langle g\rangle$. □

设 G 是子群 $G_1,\cdots,G_n$ 的积, 且满足条件

$\mathcal{Z}$ $[G_i,G_j]=1,\ i\neq j\in\{1,\cdots,n\}$,

则称 G 为子群 $G_1,\cdots,G_n$ 的**中心积**(central product). 由条件 $\mathcal{Z}$, 子群 G_i 在 G 中正规, 并且对 $i=1,\cdots,n$, 有

$$G_iZ(G)\cap \prod_{j\neq i} G_jZ(G) = Z(G).$$

由同态定理得

1.6.7 设群 G 是 $G_1,\cdots,G_n$ 的中心积, $\overline{G}:=G/Z(G)$. 那么 $\overline{G}$ 是 $G_1,\cdots,G_n$ 的直积, 且

$$\overline{G}\cong G_i/Z(G_i),\quad i=1,\cdots,n.$$ □

下面引进半直积的概念. 和研讨直积相反, 首先给出内半直积的概念.

设群 G 有子群 X 和 H. 如果满足

$\mathcal{SD}_1$ $G=XH$,

$\mathcal{SD}_2$ $H\trianglelefteq G$,

$\mathcal{SD}_3$ $X\cap H=1$,

则称群 G 为 X 和 H 的 (内)**半直积**((internal) semidirect product). 因此在半直积 $G = XH$ 中, 子群 X 是正规子群 H 的一个补. 如果 X 也正规于 G, 那么 G 就是直积 $X \times H$.

1.6.8 设 X 和 H 是 G 的子群, 满足条件 $\mathcal{SD}_1, \sim \mathcal{SD}_3$.

(a) 对每一个 $g \in G$, 它的乘积表示方式 $g = xh$ 是唯一的, 其中, $x \in X$, $h \in H$.

(b) 对 $x_1, x_2 \in X$ 和 $h_1, h_2 \in H$, 有

$$(x_1h_1)(x_2h_2) = (x_1x_2)(h_1^{x_2}h_2).$$

证明 因为 X 是 H 在 G 中的代表系, 由 1.1.9 即可得到 (a). 结论 (b) 是显然的. □

设 X, H 是群, $\varphi: X \to \mathrm{Aut}\, H$ 是一个同态. 那么 X(关于 φ) 作用在 H 上. 如同 1.3 节, 可设

$$h^x := h^{x^\varphi}, \quad x \in X,\ h \in H.$$

于是有

$$(h^x)^y = h^{xy}, \quad h \in H,\ x, y \in X.$$

乘法 (比较 1.6.8(b))

$$(x_1, h_1)(x_2, h_2) := (x_1x_2, h_1^{x_2}h_2) \quad x_i \in X,\ h_i \in H$$

使 Cartesian 积

$$G := \{(x, h) | x \in X,\ h \in H\}$$

成为群, 其中, G 的单位元是 $(1_X, 1_H)$ *, (x, h) 的逆是

$$(x^{-1}, (h^{-1})^{x^{-1}}).$$

结合律可验证如下:

$$\begin{aligned}((x_1, h_1)(x_2, h_2))(x_3, h_3) &= (x_1x_2, h_1^{x_2}h_2)(x_3, h_3) = (x_1x_2x_3, (h_1^{x_2}h_2)^{x_3}h_3)\\ &= (x_1x_2x_3, h_1^{x_2x_3}h_2^{x_3}h_3) = (x_1, h_1)(x_2x_3, h_2^{x_3}h_3)\\ &= (x_1, h_1)((x_2, h_2)(x_3, h_3)).\end{aligned}$$

这个群称为 X 和 H 的 (关于 φ 的)(外)**半直积**((external) semidirect product), 记为 $G = X \ltimes_\varphi H$ 或简单地记为 $G = X \ltimes H$. 甚至, 在不混淆其具体作用的情形下, 记为 $G = XH$.

---

* 原书此处有误. —— 译者注

如果 φ 是平凡同态, 即 X 平凡地作用在 H 上, 那么 $X \ltimes H$ 就是直积 $X \times H$. 对于直积而言, 嵌入

$$\varepsilon_X : X \to X \ltimes H, \text{ 其中, } x \mapsto (x, 1),$$

$$\varepsilon_H : H \to X \ltimes H, \text{ 其中, } h \mapsto (1, h)$$

都是单同态, $X \ltimes H$ 是子群 X^{ε_X} 和 H^{ε_H} 的半直积. 通常, 可以通过 ε_X(或 ε_H) 把 X 与 X^{ε_X}(或 H 与 H^{ε_H}) 等同. 那么 X 在 H 上的作用就是在 $X \ltimes H$ 中的共轭作用.

2 阶元也称为**对合**(involutions), 由两个对合生成的群是一个**二面体群**(dihedral group). 下述结果表明二面体群是两个循环群的半直积.

1.6.9　设 G 是 $2n$ 阶的有限群, 则下面结论等价:

(i) G 是一个二面体群.

(ii) G 是满足条件

(D) $o(x) = 2,\ o(h) = n,\ h^x = h^{-1}$

的两个循环子群 $X = \langle x \rangle$ 和 $H = \langle h \rangle$ 的半直积 $X \ltimes H$.

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii). 设 x, y 是使 $G = \langle x, y \rangle$ 的 G 的两个对合, 且

$$X := \langle x \rangle, \quad h := xy, \quad H := \langle h \rangle,$$

则有

$$h^x = xxyx = yx = h^{-1} = yxyy = h^y.$$

故 $H \trianglelefteq G$, $G = XH$. 如果 $X \cap H \neq 1$, 那么 x, 从而 y 也在 H 中. 由 H 循环得 $x = y$. 于是 $h = xy = 1$ 得 $H = 1$. 这矛盾于 $x \in H$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 因为

$$y^2 = (xhx)h = h^{-1}h = 1,$$

元素 $y := xh$ 是一个对合. 因此 $G = \langle x, y \rangle$ 是二面体群. □

如果 G 是 1.6.9(ii) 中所述的群, 那么 G 的群表由 (D) 中的关系唯一确定. 因此, 从同构角度讲, 只有一个 $2n$ 阶二面体群. 这样的群记为 D_{2n}. 显然 $D_2 \cong C_2$, 而 $D_4 \cong C_2 \times C_2$.

D_{2n} 是正 n 边形的对称群. 对 $n = 3$, $n = 4$, 请读者自己证明.

在 4.4 节中将介绍第 3 种类型乘积, **圈积**(wreath product), 它由直积和半直积加以构造.

习　　题

下设 A, B 和 G 是群.

1. (a) A 的每一个正规子群都是 $A\times B$ 的正规子群.

(b) 从 $U\leqslant A\times B$ 不能推出 $U=(A\cap U)\times(B\cap U)$.

(c) 如果 A 和 B 为有限且 $(|A|,|B|)=1$, 那么 A 和 B 都是 $A\times B$ 的特征子群.

(d) $\mathrm{Aut}\,(A\times B)$ 包含一个同构于 $\mathrm{Aut}\,A\times\mathrm{Aut}\,B$ 的子群.

2. 设 $G=A\times B$. 那么 $A\cong B$ 当且仅当存在 G 的子群 D 使得 $G=AD=BD$, 且 $1=A\cap D=B\cap D$.

3. 设 G 为有限. 假设 G 的每一个极大子群都是单群且在 G 中正规. 那么 G 是交换群且 $|G|\in\{1,p,p^2,pq\}$, 其中 p,q 是素数.

4. 如果群 X 是非交换单群的直积, 则称 X 为半单(semisimple) 的. 设 G 是群, M,N 是 G 的正规子群. 如果 G/N 和 G/M 都是半单的, 那么 $G/(M\cap N)$ 也是半单的.

5. 证明第 3 页的 6 阶非交换群是群 D_6.

6. 设 $n\geqslant 2$, 则

$$Z(D_{2n})\neq 1\Leftrightarrow n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2).$$

7. 设 G_1, G_2 是使 $G_1/Z(G_1)\cong G_2/Z(G_2)$ 的有限完备群. 那么存在有限完备群 G 及子群 $Z_1,Z_2\leqslant Z(G)$ 满足

$$G/Z(G)\cong G_i/Z(G_i),\ G/Z_i\cong G_i,\quad i=1,2.$$

下设 G 是一个二面体群且 $4<|G|<\infty$.

8. 给出 G 的所有子群.

9. (a) $|Z(G)|\leqslant 2$.

(b) 对 $G\backslash Z(G)$ 的每一个对合 a 有 $\langle a\rangle Z(G)=\{g\in G\,|\,g^a=g\}$.

(c) $|G:G'|=2|Z(G)|$.

(d) 对 $G\backslash Z(G)$ 的每一个对合 a 都存在一个对合 b 使得 $G=\langle a,b\rangle$.

10. 设 $Z(G)\neq 1$, a 是 $G\backslash Z(G)$ 的一个对合. $aZ(G)$ 中的元素在 G 中共轭当且仅当 $8\,||G|$.

11. 下面的结论等价:

(a) 所有的对合在 G 中共轭.

(b) $Z(G)=1$.

(c) G 中存在一个对合 a, 使 $|C_G(a)|=2$.

(d) $4\nmid |G|$.

(e) G 包含一个奇阶极大子群.

1.7　极小正规子群

设 G 是一个群. G 的一个正规子群 $N\neq 1$ 称为 G 的**极小正规子群**(minimal

normal subgroup), 如果 1 和 N 是仅有的包含在 N 中的 G 的正规子群. 显而易见, 每一个非平凡的有限群都有一个极小正规子群. 而且, 任何一个非平凡的有限群或者是一个单群或者包含一个真极小正规子群. 在很多对群阶用归纳法的证明中, 极小正规子群起到重要的作用.

本节我们收集了极小正规子群的一些基本性质. 6.5 节和 6.6 节将给出关于极小正规子群嵌入的相关内容.

1.7.1 设 N 是 G 的极小正规子群.

(a) 对 G 的所有的正规子群 M 有 $N \leqslant M$ 或 $N \cap M = 1$. 在后者情形有 $[N, M] = 1$.

(b) 如果 N 是交换群, 那么对所有满足 $G = NH$ 的 G 的子群 H 有 $N \leqslant H$ 或 $N \cap H = 1$.

(c) 如果 φ 是从 G 到群 H 的满同态, 那么 $N^\varphi = 1$ 或 N^φ 是 H 的一个极小正规子群.

证明 (a) 注意到

$$[N, M] \leqslant N \cap M \trianglelefteq G,$$

从 N 的极小性可直接推出 (a).

(b) 因 N 是交换群, 所以 $M := H \cap N$ 不仅正规于 H 而且正规于 N. 又因为 $G = HN$, 得 $M \trianglelefteq G$, 从而 $M \in \{1, N\}$.

(c) 设 $A \neq 1$ 是包含在 N^φ 中的 H 的正规子群. 于是 $A^{\varphi^{-1}} \cap N$ 是 G 的正规子群, 又因 $A \neq 1$, 得 $A^{\varphi^{-1}} \cap N \neq 1$. 因此 $A^{\varphi^{-1}} \cap N = N$, $N^\varphi = A$. □

1.7.2 设 $\mathcal{M}$ 是 G 的极小正规子群的有限集, 令 $M = \prod\limits_{N \in \mathcal{M}} N$.

(a) 设 U 是 G 的正规子群. 那么存在 $N_1, \cdots, N_n \in \mathcal{M}$, 使得

$$UM = U \times N_1 \times \cdots \times N_n.$$

(b) 存在 $N_1, \cdots, N_n \in \mathcal{M}$, 使得

$$M = N_1 \times \cdots \times N_n.$$

证明 (a) 由 1.7.1(a) 对每一个满足 $N \not\leqslant U$ 的 $N \in \mathcal{M}$ 有 $U \cap N = 1$, 从而有 $UN = U \times N$. 设 $\{N_1, \cdots, N_n\}$ 是满足下面性质的 $\mathcal{M}$ 的极大子集:

$$U\left(\prod_{i=1}^{n} N_i\right) = U \times N_1 \times \cdots \times N_n =: X.$$

假设 $X \neq UM$. 那么存在 $N \in \mathcal{M}$ 使 $N \not\leqslant X$. 由 1.7.1(a) 得

$$XN = X \times N = U \times N_1 \times \cdots \times N_n \times N,$$

这和 $\{N_1, \cdots, N_n\}$ 的极大性选择相矛盾. 因此 $X = UM$.

取 $U = 1$, 从 (a) 即得到 (b). □

1.7.3　设 N 是 G 的极小正规子群, E 是 N 的极小正规子群, 且假设集合 $\mathcal{M} = \{E^g | g \in G\}$ 是有限的, 则 E 是单群且在 $\mathcal{M}$ 中存在 $E_1, \cdots, E_n$ 使得

$$N = E_1 \times \cdots \times E_n.$$

证明　子群 $\prod_{g \in G} E^g$ 正规于 G, 于是必等于 N. 因此从 1.7.2(a) 得 $N = E_1 \times \cdots \times E_n$. E_1 的每一个正规子群也正规于 N. 这表明了 E_1 是单群, 于是由 $E \cong E_1$, E 是单群. □

如果 1.7.3 中的 E 是交换群, 于是同构于 $C_p (p \in \mathbb{P})$, 则得

1.7.4　设 N 是有限群 G 的极小交换正规子群. 那么存在素数 $p \in \mathbb{P}$ 使得 N 是同构于 C_p 的一些子群的直积. □

在 1.7.4 的情形 (极小正规子群为交换) 下, 知道因子 E_i 的结构. 另一方面, N 中的这些因子一般可有很多不同的选择 (对照 1.6.3 后的评注).

如果极小正规子群 N 不是交换的, 那么有完全不同的情况. 初等方法不能得到因子 E_i 结构的进一步的性质, 但是根据 1.6.3(b), 这些因子是唯一确定的.

结合 1.6.3(b) 可以得到

1.7.5　设 N 是有限群 G 的非交换极小正规子群, $\mathcal{K}$ 是 N 的极小正规子群的集合.

(a) $\mathcal{K}$ 的元素是非交换单群, 且在 G 中共轭.

(b) 对每一个 $M \trianglelefteq N$, 存在 $\mathcal{K}(M) \subseteq \mathcal{K}$ 使得

$$M = \mathop{\times}_{E \in \mathcal{K}(M)} E, \; \mathcal{K}(M) = \{E \in \mathcal{K} | E \leqslant M\}.$$

(c) $N = \mathop{\times}_{E \in \mathcal{K}} E$. □

习　题

下设 G 是一个有限群, L 是 G 的一个极大子群.

1. G 的所有满足 $N \cap L = 1$ 的极小正规子群 N 同构.

2. 设 L 是非交换单群. 那么 G 中至多存在两个极小正规子群.

3. 设 L 和 G 如 2 题中所述. 给出有两个极小正规子群的群例 G.

4. 假设 G 包含两个极小正规子群, 且其中任何一个都不包含在 L 中. 那么 L 的每一个极小正规子群都包含在 G 的所有的极小正规子群的积中.

5. 设 (*) 是性质

(*)　每一个极小正规子群都包含在中心内.

(a) 设 N, M 是具有性质 (*) 的 G 的正规子群. 那么 NM 也具有性质 (*).

(b) 如果 G 具有性质 (*), 那么 G 的每一个正规子群都具有性质 (*).

1.8 合 成 列

在本节中, 设 G 是非平凡的有限群. 记 $(A_i)_{i=0,\cdots,a}$ 是 G 的**长度** (length)为 a 的**子群列** (subgroup series),

$$1 = A_0 < A_1 < \cdots < A_{i-1} < A_i < \cdots < A_{a-1} < A_a = G.$$

如果 $A_i \trianglelefteq G$, 称子群列 $(A_i)_{i=0,\cdots,a}$ 为 G 的一个**正规列**(normal series), 如果对所有的 $i = 1, \cdots, a$ 有 $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, 那么 $(A_i)_{i=0,\cdots,a}$ 称为 G 的一个**次正规列**(subnormal series).

如果每个 A_{i-1} 是真包含在 A_i 中的极大的 G 的正规子群, 那么正规列 $(A_i)_{i=0,\cdots,a}$ 称为**主列**(chief series).

如果每个 A_{i-1} 是 A_i 的极大的真正规子群, 那么次正规列 $(A_i)_{i=0,\cdots,a}$ 称为**合成列**(composition series).

合成列的**合成因子**(composition factors) A_i/A_{i-1} 是单群. 合成列可由如下方式得出: 始于 G, 选 A_{i-1} 作为 A_i 的极大正规子群而得到的下降群列. 类似地, 可以把正规列 (或次正规列) 加细为主列 (或合成列).

设 $(A_i)_{i=0,\cdots,a}$ 是 G 的合成列. 如果所有合成因子 A_i/A_{i-1} 是交换的①, 即是素数阶循环的 (见 24 页 1.4.6), 那么合成列的结构由 G 的阶决定: $|G|$ 的素因子分解

$$|G| = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$$

对应于

$$|G| = \prod_{i=1}^{a} |A_i/A_{i-1}|,$$

其中, $a = e_1 + \cdots + e_n$, e_j 是同构于 C_{p_j} 的合成因子 A_i/A_{i-1} 的个数.

对一个给定的有限群的合成列来说, 合成因子集是这个群的一个不变量. 这就是 Jordan-Hölder 定理. 将证明这个定理的一种形式, 它也给出了上面所提到的特殊情形, 特别是交换群情况的非平凡的结论. 为了证明这个定理, 要用到 1.3 节末尾引进的概念.

设群 X 作用在 G 上, 设 A, B 是 G 的使 $B \trianglelefteq A$ 的 X 不变子群. 那么 X 也作用在 A/B 上; 称 A/B 为 G 的 **X 截断** (X-section).

---

① 这样的一个群称为**可解的**(solvable); 见 6.1 节.

一个次正规列 $(A_i)_{i=0,\cdots,a}$ 是 G 的**X 合成列** (X-composition series), 如果所有的子群 A_i 是 X 不变的, 且 A_i 中没有严格介于 A_i 和 A_{i-1} 之间的 X 不变正规子群. 此时因子 $A_i/A_{i-1}(i=1,\cdots,a)$ 称为**X 单** (X-simple)的.

当 $X=1$ 时, G 的一个 X 合成列就是合成列, 而当 $X=G$ 时, G 的一个 X 合成列是主列.

1.8.1 Jordan-Hölder 定理[①] 设群 X 作用在 G 上, $(A_i)_{i=0,\cdots,a}$ 和 $(B_i)_{i=0,\cdots,b}$ 是 G 的两个 X 合成列, 则 $a=b$ 且存在集合 $\{A_i/A_{i-1}|i=1,\cdots,a\}$ 上的置换 π, 使得

$$(A_i/A_{i-1})^\pi \cong_X B_i/B_{i-1}.$$

证明 设 $N:=B_{b-1}$. 于是 N 是 G 的极大 X 不变正规子群, G/N 为 X 单的. 因为在 $N=1$ 时结论显然成立, 可假设 $N\neq 1$.

对 $i\in\{1,\cdots,a\}$ 和 $A_i\not\leqslant N$, 有

$$N\trianglelefteq A_iN\trianglelefteq A_{i+1}N\trianglelefteq\cdots\trianglelefteq A_{a-1}N\trianglelefteq G.$$

而由 N 的极大性, 得 $G=NA_i$. 因此对 $i=0,\cdots,a$ 都有

(1) $A_i\leqslant N$ 或 $G=NA_i$.

设

$$A_i^*:=A_i\cap N,$$

选择极大的 $j\in\{0,\cdots,a\}$ 使得 $A_j\leqslant N$, 则

$$A_j\trianglelefteq A_{j+1}^*<A_{j+1}$$

且因 $A_{j+1}\not\leqslant N$ 和 A_{j+1}/A_j 为 X 单, 得 $A_j=A_{j+1}^*$. 因此有

(2) $A_j=A_j^*=A_{j+1}^*$

和

(3) $A_{j+1}/A_j\cong_X G/N$.

结论 (3) 是因为

$$G/N\overset{(1)}{=}A_{j+1}N/N\overset{1.2.6}{\cong_X}A_{j+1}/A_{j+1}^*.$$

于是对 $k\geqslant j+2$ 有

$$A_k^*\cap A_{k-1}=A_k\cap N\cap A_{k-1}=A_{k-1}^*.$$

再由 1.2.6 得

$$A_k^*/A_{k-1}^*\cong_X A_k^*A_{k-1}/A_{k-1}\trianglelefteq A_k/A_{k-1}.$$

① 比较文献 [15] 和 [68].

而从 A_k/A_{k-1} 的 X 单性有

(4) $A_k^*/A_{k-1}^* \cong_X A_k/A_{k-1}$, $k \geqslant j+2$

或

$$A_k^*/A_{k-1}^* = 1 \text{ 且 } A_k^* = A_{k-1}^*.$$

在第 2 种情形, 由 $NA_k = G = NA_{k-1}$ 得出

$$A_k/A_k^* \cong_X G/N \cong_X A_{k-1}/A_{k-1}^*,$$

这就得 $A_k = A_{k-1}$, 矛盾.

因此

$$1 = A_0^* < \cdots < A_j^* < A_{j+2}^* < \cdots < A_a^* = N$$

和

$$1 = B_0 < \cdots < B_{b-1} = N$$

是 N 的两个 X 合成列. 对 $|G|$ 用归纳法, 可设对上面两个 X 合成列存在满足定理所要求的置换 π. 特别地, $a-1=b-1$, 从而 $a=b$.

通过设

$$(A_{j+1}/A_j)^\pi := B_b/B_{b-1},$$

可把 π 扩张为 $\{A_i/A_{i-1} | i = 1, \cdots, a\}$ 上的置换. 于是由 (3) 和 (4) 得出结论. □

第2章　交　换　群

本章给出有限交换群的结构. 从 1.4 节中已讨论过的循环群出发, 证明每一个有限交换群是循环群的直积. 在 2.2 节中, 将证明循环群的自同构群是交换群.

相对于一般群的结构来说, 交换群的结构是非常容易给出的, 这是因为交换性所蕴含的很多性质是非交换群所没有的. 例如, 在交换群中, 它的每一个子群都是正规的, 且子群的乘积还是子群 (见 1.1.5).

从本章起所研讨的群均为有限.

2.1　交换群的结构

如果 $G=\langle x\rangle$ 是一个循环群, 那么 $|G|=o(x)$, 由 Lagrange 定理得到

$$o(y)|o(x),\quad \forall y\in G.$$

交换群有一个更一般的性质, 它可由 1.6.6 证明.

2.1.1　设 G 是交换群, U 是 G 的极大阶的循环子群. 那么

$$o(y)||U|,\quad \forall y\in G.$$

证明　设 $y\in G$. 只需证明每一个整除 $o(y)$ 的素数幂 p^r 也整除 $|U|$. 设 $|U|=p^e m$, 其中, $(p,m)=1$. 由 1.4.3 知存在 $a\in\langle y\rangle$ 和 $b\in U$, 使得

$$o(a)=p^r,\quad o(b)=m.$$

于是由 1.6.6 得 $o(ab)=p^r m$. 从而由 $|U|$ 的极大性得到 $p^r|p^e m$. □

2.1.2　设 G, U 同 2.1.1 中所设. 那么 U 在 G 中有补 V; 特别地, $G=U\times V$, $|G|=|U||V|$.

证明　如果 $G=U$, 那么 $V=1$ 即为 U 的补. 设 $G\neq U$. 在 $G\backslash U$ 的所有元素中, 选 y 是使 $o(y)$ 为极小的元. 那么 $y\neq 1$, 且对 $o(y)$ 的每一个素因子 p 都有 $\langle y^p\rangle<\langle y\rangle$ (见 1.4.3), 即 $\langle y^p\rangle\leqslant U$.

设 $U=\langle u\rangle$. 由 2.1.1 和 1.4.3, $o(y)$ 是 $|U|$ 的一个因子, 且对 $|U|$ 的每一个因子, U 恰含一个阶为这样因子的子群. 因此在 $\langle u^p\rangle$ 中存在一个阶为 $\dfrac{o(y)}{p}$ 的子群,

即 $\langle y^p \rangle$. 设 $i \in \mathbb{N}$ 使得 $u^{pi} = y^p$. 于是 $(yu^{-i})^p = 1$, 但因 $y \notin U$ 有 $yu^{-i} \notin U$. 由 $o(y)$ 的极小性得

$$o(y) = p.$$

于是 $N := \langle y \rangle$ 是 G 的使

$$U \cap N = 1$$

的非平凡子群. 设 $\overline{G} = G/N$ ①. 对 $\langle \overline{x} \rangle \leqslant \overline{G}$ 有

$$o(\overline{x}) = |\langle \overline{x} \rangle| = \min\{n \in \mathbb{N} | x^n \in N\} \leqslant |\langle x \rangle| = o(x),$$

且由

$$UN/N \cong U/U \cap N \cong U$$

可得到 $|\overline{U}| = |U|$. 因此 $\overline{U}$ 是 $\overline{G}$ 的极大阶的循环子群. 对 $|G|$ 用归纳法, 假设 $\overline{U}$ 在 $\overline{G}$ 中有补 $\overline{V}$.

设 $N \leqslant V \leqslant G$ 满足 $\overline{V} = V/N$, 则因 $U \cap V \leqslant U \cap N = 1$ 得 V 是 U 在 G 中的补. □

2.1.2 中 U 的补 V 又可以分解为极大阶的循环子群及其补. 因此, 重复运用 2.1.2 可得

2.1.3 定理 每一个交换群都是循环群的直积. □

于是对每一个交换群 G 来说有

$$G \cong C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r} \text{ 且 } |G| = n_1 \cdots n_r ②.$$

如果 m 是 $|G|$ 的一个因子, 那么存在 n_i 的因子 m_i $(i = 1, \cdots, r)$ 使得 $m = m_1 \cdots m_r$. 而 $C_{m_1} \times \cdots \times C_{m_r}$ 是同构于 G 的阶为 m 的子群. 这蕴含了

2.1.4 设 G 是交换群, m 是 $|G|$ 的一个因子. 那么 G 包含一个阶为 m 的子群. □

设 p 是一个素数,

$$G_p := \{x \in G | x \text{ 是 } p \text{ 元素 }\}.$$

2.1.5 设 G 是交换群. 那么 G_p 是 G 的阶为 $|G|_p$ 的特征 p 子群③.

证明 对 $x, y \in G_p$, xy 也是 p 元. 再由 $xy = yx$ 和 1.1.3*, G_p 是一个子群. 因为自同构把 p 元映射到 p 元, 所以这个子群是 G 的特征子群.

---

① 关于"上划线"记号.
② C_{n_i} 是阶为 n_i 的子群, 见 1.4 节.
③ 对 $n \in \mathbb{N}$, 记 n_p 是最大的整除 n 的 p 幂.
* 原书此处有误.—— 译者注

由 2.1.4, G 包含一个阶为 $|G|_p$ 的子群 P. 因此 P 是 p 群, 而 P 的每一个元素是 p 元; 特别地, $P \leqslant G_p$.

如果 $P \neq G_p$, 那么

$$k := |G_p : P| \neq 1$$

且 $(k, p) = 1$(Lagrange 定理). 而由 2.1.4 得 G_p 中存在阶为 k 的子群 K, 又因为 K 的每一个元素都是 p 元, 这就和 1.1.8 矛盾. □

2.1.6　定理　设 G 是交换群. 那么

$$G = \underset{p \in \pi(G)}{\times} G_p.$$

证明　由 1.6.5, 子群 G_p $(p \in \pi(G))$ 的积 G_1 是一个直积. 于是由 2.1.5 得到

$$|G_1| = \prod_{p \in \pi(G)} |G_p| = \prod_{p \in \pi(G)} |G|_p = |G|,$$

因此 $G_1 = G$. □

在交换群中, 两个阶互素的循环群的积也是循环群 (见 1.6.6). 因此, 一个交换群是否循环取决于所有的子群 G_p, $p \in \pi(G)$ 是否循环.

2.1.7　对交换群 G 来说, 下面的命题是等价的:

(i) G 是循环的.

(ii) 在 G 中, 对所有的 $p \in \pi(G)$ 都恰存在一个 p 阶子群.

(iii) 对所有的 $p \in \pi(G)$, G_p 都是循环的.

证明　用到 G_p 上, 从 1.4.3 得 (i) $\Rightarrow$ (ii), 而从 2.1.3 得 (ii) $\Rightarrow$ (iii). 最后, 重复应用 1.6.6 得到 (iii) $\Rightarrow$ (i). □

在 2.1.3 中, 分解式的因子还会有进一步的结果. 由 2.1.6 分解的唯一性, 只需研究交换 p 群的情形.

交换 p 群称为**初等交换**(elementary Abelian)群, 如果对所有的 $x \in G$ 都有 $x^p = 1$.

2.1.8　设 G 是阶为 $p^n > 1$ 的初等交换群 p 群, 则

(a) G 是 n 个 p 阶循环群的直积.

(b) 如果 G 写成加法形式, 那么对 $\bar{k} := k + p\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 和 $x \in G$, 数量乘法

$$\bar{k}x := \underbrace{x + \cdots + x}_{k}$$

使 G 成为一个在素域 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上的 n 维向量空间 V. G 的子群对应于 V 的子空间, 而 G 的自同构对应于 V 的自同构.

证明 (a) 因为 G 的每一个非平凡循环子群的阶为 p, G 是 p 阶子群的直积 (见 2.1.3), 又因 $|G| = p^n$, 得 G 是 n 个循环群的直积.

(b) 结论为显然, 这是因为有 n 个元素为基的向量空间 V 等价于 (a) 中的 G. □

在 p 群 (不要求为交换)G 中, 群

$$\Omega_i(G) := \langle x \in G | x^{p^i} = 1 \rangle, \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

是一个特征子群. 显然

$$\Omega_{i-1}(G) \leqslant \Omega_i(G), \quad i = 1, 2, \cdots.$$

令

$$\Omega(G) := \Omega_1(G).$$

如果 G 是交换群, 那么

$$\Omega_i(G) = \{x \in G | x^{p^i} = 1\}$$

且

$$G \text{ 是初等交换群} \Leftrightarrow G = \Omega(G).$$

2.1.9 设 G 是交换 p 群, 且

(*) $G = A_1 \times \cdots \times A_n$ 是 n 个循环群 $A_i \neq 1$ 的直积. 于是

$$|\Omega(G)| = p^n.$$

更确切地说, 如果数 $n_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 由

$$|\Omega_i(G)/\Omega_{i-1}(G)| = p^{n_i}$$

所定义, 那么 $n_i - n_{i+1}$ 是 (*) 中阶为 p^i 的因子的个数.

证明 由

$$\Omega_i(G) = \Omega_i(A_1) \times \cdots \times \Omega_i(A_n)$$

得到 $|\Omega(G)| = p^n = p^{n_1}$. 因为

$$\begin{aligned}\Omega_2(G)/\Omega(G) = \Omega(G/\Omega(G)) &\overset{1.6.2(c)}{\cong} \Omega(\times_i (A_i/\Omega(A_i))) = \times_i \Omega(A_i/\Omega(A_i)) \\ &= \times_i \Omega_2(A_i)/\Omega(A_i),\end{aligned}$$

n_2 是 (*) 中阶至少为 p^2 的因子的个数. 于是 $n_1 - n_2$ 是阶为 p 的因子的个数. 对 $i \geqslant 2$ 情形, 用相同的方法可算出 $n_i - n_{i+1}$ 是 (*) 中阶为 p^i 的因子的个数. □

群 G 中生成元的最小个数称为群 G 的**秩**(rank), 记作 $r(G)$. 如果 G 是交换 p 群, 那么 $r(G) = n$, 其中, n 与 2.1.9 中的 n 相同.

结论 2.1.3, 2.1.6 和 2.1.9 可以完全分类所有的有限交换群: 有限交换群是素数幂阶的循环群的直积, 其同构类型由这些因子的阶和个数决定. 例如, 恰存在 9 个阶为 $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ 的交换群, 即

$$
\begin{aligned}
&C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_5 \times C_5 \times C_5\\
&C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_5 \times C_{5^2}\\
&C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_{5^3}\\
&C_2 \times C_{2^2} \times C_5 \times C_5 \times C_5\\
&C_2 \times C_{2^2} \times C_5 \times C_{5^2}\\
&C_2 \times C_{2^2} \times C_{5^3}\\
&C_{2^3} \times C_5 \times C_5 \times C_5\\
&C_{2^3} \times C_5 \times C_{5^2}\\
&C_{2^3} \times C_{5^3}
\end{aligned}
$$

其中, 只有最后一个群是循环群.

应该提及的是: 有限生成交换群有类似于有限交换群的结构. 它们是有限交换群和同构于整数加群 $\mathbb{Z}$ 的群的直积 (见文献 [19] 的 82 页).

习 题

下设 G 是一个有限交换群.

1. 设 $e \in \mathbb{N}$ 是满足对所有 $a \in G, a^e = 1$ 的最小数 (称 $\exp G := e$ 为 G 的**指数**(exponent)), 则存在元素 $b \in G$ 使 $o(b) = e$.

2. 设 $\exp G = e$. 那么 G 是循环群当且仅当 $|G| = e$.

3. 设 p 是一个素数, $C = C_{p^3} \times C_{p^3}$, $B = C_p \times C_p \times C_p$, 而 $G = C \times B$, 则 G 中不含其补同构于 C_{p^2} 的子群.

4. 阶为 546 的交换群是循环群.

5. 举出一个满足 2.1.4 所述结论的非交换群的例子.

6. 确定 $\prod\limits_{g \in G} g$.

7. 对 G 的每一个子群 U 都存在 G 的一个自同态 φ 使 $\operatorname{Im}\varphi = U$.

8. 如果 $\operatorname{Aut} G$ 是交换群, 那么 G 是循环群.

9. 应用第 6 题证明

$$(p-1)! \equiv -1 \bmod p \ (p \text{ 是素数})^{①}.$$

① Wilson 定理.

10. 设 $a, p \in \mathbb{N}$, p 是素数且 $(a,p)=1$. 那么

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p^{①}.$$

2.2 循环群的自同构

作为一个交换群的例子, 我们在本节确定循环群的自同构.

对一个交换群 G 和每一个整数 k, 映射

$$\alpha_k : G \to G, \text{其中}, x \mapsto x^k$$

是 G 的一个同态且

$$\operatorname{Ker}\alpha_k = \{x \in G | x^k = 1\}.$$

于是, $\operatorname{Ker}\alpha_k$ 包含 G 中所有的其阶整除 k 的元素.

2.2.1 α_k 是交换群 G 的自同构当且仅当 $(k, |G|) = 1$.

证明 如果 $(k,|G|)=1$, 则由 1.1.8 有 $\operatorname{Ker}\alpha_k = 1$. 反之, 如果 $(k,|G|) \neq 1$, 那么 k 和 $|G|$ 有一个公共的素因子 p. 由 2.1.6, p 子群 G_p 是非平凡的, 于是 G 中存在 p 阶子群. 而 $\operatorname{Ker}\alpha_k$ 包含这个 p 阶子群. □

这个结论与 1.4.3 一起得到关于循环群的以下结论:

2.2.2 n 阶循环群的自同构的型为 2.2.1 中的 α_k, 其中, $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ 且 $(k,n)=1$. □

从 $\alpha_k\alpha_{k'} = \alpha_{k \cdot k'} = \alpha_{k' \cdot k} = \alpha_{k'}\alpha_k$, 其中, k, k' 是整数, 得到

2.2.3 循环群的自同构是交换群[②]. □

因为 2.1.6 中的分解 $G = \underset{p\in\pi(G)}{\times} G_p$, 有

$$\operatorname{Aut} G \cong \underset{p\in\pi(G)}{\times} \operatorname{Aut} G_p$$

(见 1.6.2). 因此只要确定循环 p 群的自同构群就够了.

如果 G 是阶为 $p^e > 1$ 的循环 p 群, 那么 $|\operatorname{Aut} G|$ 是使得 $1 \leqslant k < p^e$ 和 $(k,p)=1$ 的整数 k 的个数. 于是有

$$|\operatorname{Aut} G| = p^{e-1}(p-1).$$

特别地, 如果 $|G| = p$, 那么 $|\operatorname{Aut} G| = p-1$. 此时有

2.2.4 p 阶群的自同构群是循环群[③].

---

① Fermat 小定理.

② 可以很容易地把 2.2.2 和 2.2.3 推广为循环群 C_n 的自同态环同构于环 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

③ 这也可以从有限域的乘法群是循环群这个众所周知的结果得到.

证明[1]　设 G 是 p 阶 (循环) 群. 那么对 $g \in G$ 和 $\alpha \in \operatorname{Aut} G$ 有

(1) $g^\alpha = g \Leftrightarrow g = 1$ 或 $\alpha = 1$.

下面假设 $\operatorname{Aut} G$ 非循环来导出矛盾. 由 2.1.7, 存在 $r \in \pi(\operatorname{Aut} G)$ 和子群 $A \leqslant \operatorname{Aut} G$, 使

$$A \cong C_r \times C_r.$$

设 $\mathcal{B}$ 是 A 的所有 r 阶子群的集合, 则有

(2) $|\mathcal{B}| = r + 1$ 且 $B_1 \cap B_2 = 1$, 对 $\mathcal{B}$ 中的 $B_1 \neq B_2$.

对 $1 \neq B \leqslant A$ 和 $g \in G^\#$, 设

$$g_B := \prod_{\beta \in B} g^\beta.$$

那么对 $\alpha \in B^\#$ 有

$$(g_B)^\alpha = \prod_{\beta \in B} g^{\beta\alpha} = g_B.$$

于是由 (1) 得到 $g_B = 1$. 从而由 (2) 得

$$1 = g_A = g^{-r} \prod_{B \in \mathcal{B}} g_B = g^{-r},$$

因此 $o(g) = r$. 这蕴含了 $p = r$ (见 1.1.8). 另一方面, 由 2.2.2 有

$$r \text{ 整除 } |\operatorname{Aut} G| = p - 1,$$

这是一个矛盾. □

2.2.5　设 G 是一个 $p^e > 1$ 阶循环 p 群且 $A := \operatorname{Aut} G$, 则

$$A = S \times T,$$

其中, S 是一个 p^{e-1} 阶群, T 是一个 $p-1$ 阶循环群.

证明　已经知道 $|A| = p^{e-1}(p-1)$, 并且 A 是交换群 (见 2.2.3). 由 2.1.6 的直积分解有

$$A = S \times T, \text{ 其中, } |S| = p^{e-1}, |T| = p - 1.$$

设 H 是在 G 中的 p 阶 (特征) 子群 (见 1.4.3) 且

$$\varphi : A \to \operatorname{Aut} H, \text{ 其中, } \alpha \mapsto \overline{\alpha} := \alpha|_H,$$

---

[1] 这个证明中的方法将在 8.3.1 中以更一般的形式再次用到.

则因

$$\mathrm{Aut}\, H = \{\overline{\alpha_k} | 1 \leqslant k \leqslant p-1\},$$

φ 是一个满同态. 进一步, 因 $|\mathrm{Aut}\, H| = p-1$ 和 $(|S|, p-1) = 1$, 得 $S \leqslant \mathrm{Ker}\, \varphi$ (见 1.1.8). 事实上, 因为 $|A| = |\mathrm{Im}\, \varphi||\mathrm{Ker}\, \varphi|$ 而有 $S = \mathrm{Ker}\, \varphi$. 于是由同态定理得到

$$T \cong A/\mathrm{Ker}\, \varphi \cong \mathrm{Aut}\, H,$$

从而由 2.2.4 得 T 是循环的. □

2.2.6 设 $G = \langle x \rangle$, $e \geqslant 2$, A 和 S 同 2.2.5.

(a) 当 $p \neq 2$ 或 $p = 2 = e$ 时有

$$S = \langle \alpha \rangle, \text{其中}, x^\alpha = x^{1+p}.$$

特别地, $\langle \alpha^{p^{e-2}} \rangle$ 是 A 中唯一的 p 阶子群且对 $\beta := \alpha^{p^{e-2}}$ 有

$$x^\beta = x^{1+p^{e-1}}.$$

(b) 当 $p = 2 < e$ 时有

$$S = A = \langle \gamma \rangle \times \langle \delta \rangle, \text{其中}, x^\gamma = x^{-1}, x^\delta = x^5.$$

特别地, $\gamma, \xi := \delta^{2^{e-3}}, \eta := \gamma\xi$ 是仅有的 2 阶自同构, 且有

$$x^\xi = x^{1+2^{e-1}} \text{ 和 } x^\eta = x^{2^{e-1}-1}.$$

证明 (a) 因为 $(p, 1+p) = 1$, 映射 α 是 G 的自同构 (见 2.2.1). 如果 $p = 2 = e$, 那么 $x^\alpha = x^{1+p} = x^3 = x^{-1}$ 是 G 的仅有的非平凡自同构. 因此下面可以假设 $p \neq 2$. 知道 α 的阶是满足

$$(1+p)^m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p^e)$$

的最小的整数 $m \in \mathbb{N}$.

因为 $p \neq 2$, 对 $(1+p)^m$ 用二项式定理得

$$(1+p)^{p^{e-1}} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p^e)$$

和

$$(1+p)^{p^{e-2}} \not\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p^e).$$

由此得到 $m = p^{e-1}$. 于是 $\langle \alpha \rangle$ 和 S 的阶相同, 即 $S = \langle \alpha \rangle$. 同样对 $\beta = \alpha^{p^{e-2}}$ 用二项式定理即可得到所需的结论.

(b) 同 (a), 用二项式定理到 $(1+2^2)^{2^k}$ $(k\in\mathbb{N})$ 上可证得

$$(1+2^2)^{2^{e-2}}\equiv 1(\operatorname{mod} 2^e)$$

和

$$(1+2^2)^{2^{e-3}}\not\equiv 1(\operatorname{mod} 2^e).$$

如同 (a) 中那样, 这蕴含了由

$$x^\delta=x^5=x^{1+2^2}$$

定义的自同构 δ 的阶为 2^{e-2}. 从对任意的 $k\in\mathbb{N}$ 有

$$(1+2^2)^k\not\equiv -1\,(\operatorname{mod} 2^e),\quad e\geqslant 3,$$

最终导出 δ 的任何方幂都不等于由 $x^\gamma=x^{-1}$ 定义的自同构 γ. 因此, $\langle\gamma\rangle$ 和 $\langle\delta\rangle$ 生成 $S(=A)$ 的 $2^{e-2}\cdot 2=2^{e-1}$ 阶子群. 由此可得 $A=\langle\gamma\rangle\times\langle\delta\rangle$. 又从

$$(1+2^2)^{2^{e-3}}\equiv 1+2^{e-1}(\operatorname{mod} 2^e)$$

可得到等式 $x^\xi=x^{1+2^{e-1}}$. 最后因为

$$x^\eta=x^{\gamma\xi}=(x^{-1})^{1+2^{e-1}}=x^{-1-2^{e-1}}$$

和

$$x^{-2^{e-1}}=x^{2^{e-1}}$$

而得到 $x^\eta=x^{2^{e-1}-1}$. □

应该强调的是, 在 2.2.6(b) 的情况下自同构群 A 包含一个同构于 $Z_2\times Z_2$ 的子群, 因此不是循环群.

习　题

下设 p 是一个素数, G 是一个有限群.

1. 设 $q\neq 1$ 是 $p-1$ 的因子. 用半直积构造一个包含一个 p 阶正规子群的 pq 阶非交换群. 再构造一个包含一个 p^e 阶循环正规子群的 $p^{(e-1)e}$ $(e\geqslant 2)$ 阶非交换群.

2. 设 p 是 $|G|$ 的最小素因子, N 是一个 p 阶正规子群. 那么 $N\leqslant Z(G)$.

3. 设 $p\neq 2$, G 是一个循环 p 群. 那么 $\operatorname{Aut}G$ 为循环.

4. 用 2.2.4 证明中的想法证明: 设 K 是一个域, U 是 K 的乘群的有限子群. 那么 U 循环.

下设 $G,\gamma,\eta,\varepsilon$ 同 2.2.6(b) 中所设, 令

$$D:=\langle\gamma\rangle\ltimes G,\ H:=\langle\eta\rangle\ltimes G^{①},\ M:=\langle\varepsilon\rangle\ltimes G.$$

① H 是一个半二面体群; 见 5.3 节.

5. D 是一个二面体群.

6. M 的所有对合都包含在 $\langle \varepsilon, x^{2^{e-1}} \rangle$ 中.

7. 设 H_1, H_2 是由

$$H_1 := \langle x^2, \eta \rangle,\ H_2 := \langle x^2, \eta x \rangle$$

定义的 H 的子群, 则

(a) $H_1 \cap H_2 = \langle x^2 \rangle$ 且 $|H : H_i| = 2, i = 1, 2$.

(b) H_1 是一个二面体群且包含 H 的所有对合.

(c) H_2 恰含一个对合①.

---

① H_2 称为 (广义) 四元数群; 见 5.3 节.

第3章　作用和共轭

作用这个概念在有限群理论中起着重要的作用. 3.1 节将介绍关于群的作用的基本概念和结果. 在 3.2 节和 3.3 节中, 运用在陪集上的作用来证明重要的 Sylow 定理, Schur-Zassenhaus 定理和 Gaschütz 定理.

3.1　作　　用

设 $\Omega = \{\alpha, \beta, \cdots\}$ 是一个非空有限集. Ω 上所有置换的集合 S_Ω 关于乘积

$$\alpha^{xy} := (\alpha^x)^y, \quad \alpha \in \Omega,\ x, y \in S_\Omega$$

成为一个群, 称为 Ω 上的**对称群**(symmetric group). 把 $\{1, \cdots, n\}$ 上的对称群记作 S_n, 称为n **次对称群**(symmetric group of degree n). 显然 $S_n \cong S_\Omega$ 当且仅当 $|\Omega| = n$.

如果对 $\Omega \times G$ 中的每一对 (α, g), 都对应 Ω 中一个确定的元素 α^g① 满足

$\mathcal{O}_1$　对 $1 = 1_G$ 和所有的 $\alpha \in \Omega$ 有 $\alpha^1 = \alpha$,

$\mathcal{O}_2$　对所有的 $x, y \in G$ 和所有的 $\alpha \in \Omega$ 有 $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$,

则称群 G **作用** (act)在 Ω 上.

映射

$$g^\pi : \Omega \to \Omega, \text{ 其中}, \alpha \mapsto \alpha^g$$

描述了 $g \in G$ 在 Ω 上的作用. 因为

$$(\alpha^g)^{g^{-1}} \overset{\mathcal{O}_2}{=} \alpha^{gg^{-1}} = \alpha^1 \overset{\mathcal{O}_1}{=} \alpha,$$

$(g^{-1})^\pi$ 是 g^π 的逆. 特别地, g^π 是一个双射, 从而是 Ω 上的一个置换. 于是由 $\mathcal{O}_2$ 得到

$$\pi : G \to S_\Omega, \text{ 其中}, g \mapsto g^\pi$$

是一个同态. 同态定理表明 $G/\mathrm{Ker}\,\pi$ 同构于 S_Ω 的一个子群, 从而也同构于 S_n 的一个子群, 其中, $n := |\Omega|$.

---

① 类似于群的定义中那样我们用乘积的形式, 但在这里把它记成为 α^g, 而不是 αg.

反之, 对每一个同态 $\pi: G \to S_\Omega$, 如果定义 $\alpha^g := \alpha^{g^\pi}$, 则给出了 G 在 Ω 上的作用. 同态 $\pi: G \to S_\Omega$ 叫做 G 在 Ω 上的一个**作用**(action).

如果 $\operatorname{Ker}\pi = 1$, 则称 G **忠实**(faithfully) 作用在 Ω 上; 如果 $\operatorname{Ker}\pi = G$, 则称 G **平凡**(trivially) 作用在 Ω 上.

对 G 在 Ω 上的每一个作用 π, 如果设

$$\alpha^{(\operatorname{Ker}\pi)g} := \alpha^g,$$

就得到了一个 $G/\operatorname{Ker}\pi$ 在 Ω 上的忠实作用.

下面介绍几种在以后的章节中常遇到的重要作用.

3.1.1 (a) 由共轭

$$A \overset{x}{\mapsto} x^{-1}Ax = A^x,$$

群 G 作用在 G 的所有的非空子集 A 的集合上.

(b) 由共轭

$$g \overset{x}{\mapsto} x^{-1}gx = g^x,$$

群 G 作用在 G 的所有的元素 g 的集上.

(c) 通过右乘

$$Ug \overset{x}{\mapsto} Ugx,$$

群 G 作用在 G 的给定子群 U 的右陪集的集合上.

证明 在这 3 种情况下都有 $1 = 1_G$ 为作用平凡, 所以都满足条件 $\mathcal{O}_1$; 另外, 由结合律可得都满足条件 $\mathcal{O}_2$. □

在 (a) 和 (b) 的情况下, 置换 x^π 就是由 x 诱导的内自同构 (见 1.3 节).

在给定子群 U 的所有的左陪集的集合 Ω 上的"左"乘也给出一个作用 $\pi: G \to S_\Omega$. 但是因为 $gU \to xgU$ 不是同态 (而是一个反同态)[①]. 必须定义

$$x^\pi: G \to S_\Omega, \text{其中}, gU \to x^{-1}gU.$$

运用 (c) 得到

3.1.2 设 U 是 G 的指数为 n 的子群, 则 G/U_G 同构于 S_n 的一个子群[②].

证明 同 3.1.1(c) 中那样, 设 Ω 是 U 在 G 中所有的右陪集的集合且 $\pi: G \to S_\Omega$ 是由右乘定义的作用. 那么, 对 $x, g \in G$ 有

$$Ugx = Ug \Leftrightarrow gxg^{-1} \in U \Leftrightarrow x \in U^g,$$

---

① 我们仅在 3.3 中用到由左乘所定义的作用.

② $U_G = \bigcap_{g \in G} U^g$.

从而

$$x^{\pi} = 1_{S_{\Omega}} \Leftrightarrow x \in U_G,$$

即有 $U_G = \operatorname{Ker} \pi$. □

为了运用 3.1.1 中给出的作用, 首先要设定一些记号并且列举一些可从作用的定义直接得到的一些基本性质.

下设 G 是作用在集合 Ω 上的群. 对 $\alpha \in \Omega$, 设

$$G_{\alpha} := \{x \in G | \alpha^x = \alpha\}.$$

集合 G_{α} 是 α 在 G 中的**稳定子**(stabilizer); 如果 $x \in G_{\alpha}$, 则称 x **稳定**(stabilize)(**固定**(fix))α.

注意到: 由条件 $\mathcal{O}_2$, G_{α} 是 G 的一个子群.

3.1.3　对 $g \in G, \alpha \in \Omega$ 有 $(G_{\alpha})^g = G_{\alpha^g}$.

证明　$(\alpha^g)^x = \alpha^g \Leftrightarrow \alpha^{gxg^{-1}} = \alpha \Leftrightarrow gxg^{-1} \in G_{\alpha} \Leftrightarrow x \in (G_{\alpha})^g$. □

两个元素 $\alpha, \beta \in \Omega$ 称为是**等价的**(equivalent), 如果存在 $x \in G$ 使 $\alpha^x = \beta$. 于是 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$ 表明这个等价概念实际上是在 Ω 上定义了一个等价关系. 相应的等价类叫做 G 在 Ω 上的**轨道**(orbits)(或在 Ω 上的 G 轨道). 对 $\alpha \in \Omega$,

$$\alpha^G := \{\alpha^x | x \in G\}$$

是包含 α 的轨道. 如果 Ω 自身就是 G 的一个轨道, 就是说对所有的 α, $\beta \in \Omega$ 都存在 $x \in G$ 使 $\alpha^x = \beta$, 那么称 G **传递**(transitively) 地作用在 Ω 上.

3.1.4　Frattini 论断　假设 G 包含一个传递地作用在 Ω 上的正规子群 N①, 那么, 对每一个 $\alpha \in \Omega$ 有 $G = G_{\alpha}N$. 特别地, 如果 $N_{\alpha} = 1$, 那么 G_{α} 是 N 在 G 中的补.

证明　设 $\alpha \in \Omega$, $y \in G$. 由 N 在 Ω 上的传递性得到存在 $x \in N$ 使 $\alpha^y = \alpha^x$. 因此 $\alpha^{yx^{-1}} = \alpha$, 从而有 $yx^{-1} \in G_{\alpha}$. 于是 $y \in G_{\alpha}x \subseteq G_{\alpha}N$. □

下面的基本结论类似于 Lagrange 定理.

3.1.5　$|\alpha^G| = |G : G_{\alpha}|$, $\alpha \in \Omega$. 特别地, 轨道 α^G 的**长度**(length)$|\alpha^G|$ 是 $|G|$ 的一个因子.

证明　对 $x, y \in G$ 有

$$\alpha^y = \alpha^x \Leftrightarrow \alpha^{yx^{-1}} = \alpha \Leftrightarrow yx^{-1} \in G_{\alpha} \Leftrightarrow y \in G_{\alpha}x. \quad \square$$

因为 Ω 是 G 的不相交轨道的并, 得到

---

① 当然, N 是作为 G 的一个子群作用在 Ω 上.

3.1.6　设 n 是一个整数. 如果对所有的 $\alpha \in \Omega$, n 都整除 $|G:G_\alpha|$, 那么 n 也整除 $|\Omega|$. □

对 $U \subseteq G$,

$$C_\Omega(U) := \{\alpha \in \Omega | U \subseteq G_\alpha\}$$

是 U 在 Ω 中的**固定点**(fixed points) 集. 显然,$\Omega \backslash C_\Omega(G)$ 是所有长度大于 1 的 G 轨道的并.

3.1.7　设 G 是一个 p 群. 那么

$$|\Omega| \equiv |C_\Omega(G)| \pmod p.$$

证明　对 $\alpha \in \Omega' := \Omega \backslash C_\Omega(G)$, 稳定子 G_α 是 G 的一个真子群. 因此, p 是 $|G:G_\alpha|$ 的一个因子 (Lagrange 定理), 于是由 3.1.6 得

$$|\Omega'| \equiv 0 \pmod p. \qquad \Box$$

现在把 3.1.1 中的作用用于 3.1.3, 3.1.5.

设 Ω 是 G 的所有的非空子集的集合, $H \leqslant G$. 那么 H 通过共轭作用在 Ω 上. 对 $A \in \Omega$, 由

$$A^x = x^{-1}Ax, \quad x \in H$$

构成的子集是 H 的一个轨道. A 在 H 中的稳定子

$$N_H(A) := \{x \in H | A^x = A\}$$

称为 A 在 H 中的**正规化子**(normalizer).

由 3.1.5, $|H:N_H(A)|$ 是 A 的 H 共轭的个数.

设 $B \in \Omega$. 如果 $B \subseteq N_G(A)$, 则称 B **正规化**(normalizes) A.

由 3.1.1(b), H 由共轭作用在 G 的元素上. 对这个作用来说, G 的元素 g 的稳定子

$$C_H(g) := \{x \in H | g^x = g\}$$

是 g 在 H 中的**中心化子**(centralizer). 显而易见, 这个子群由满足 $xg = gx$ 的 H 中的元素 x 组成.

由 3.1.5, $|H:C_H(g)|$ 是 g 的 H 共轭的个数.

对 G 的非空子集 A,

$$C_H(A) := \bigcap_{g \in A} C_H(g)$$

是 A 在 H 中的**中心化子**(centralizer). 于是 $C_H(A)$ 恰好包含 H 中与 A 中每一个元素都交换的元素. 例如, $C_G(A) = G$ 当且仅当 A 是 $Z(G)$ 的子集. 称 G 的子集 B **中心化**(centralizes) A, 如果 $B \subseteq C_G(A)$(或等价的说 $[A, B] = 1$; 见 20 页).

对 $x \in G$, 由 3.1.3 得

$$N_G(A)^x = N_G(A^x) \text{ 和 } C_G(A)^x = C_G(A^x),$$

更一般地, 有

$$N_H(A)^x = N_{H^x}(A^x) \text{ 和 } C_H(A)^x = C_{H^x}(A^x).$$

当 $H = G$ 时, 共轭于 g 的元素组成的 G 轨道称为 g 在 G 中的**共轭类**(conjugacy class), 有

$$|g^G| = |G : C_G(g)|.$$

中心 $Z(G)$ 恰好包含 G 的共轭类长度为 1 的元素, 即只和自身共轭的元素.

因为 G 的共轭类是关于共轭作用的 G 轨道, 所以 G 是它元素的不相交共轭类的并. 由此得到

3.1.8　类方程　设 $K_1, \cdots, K_h$ 是 G 的长度大于 1 的共轭类, 又设 $a_i \in K_i$, $i = 1, \cdots, h$, 则

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{h} |G : C_G(a_i)|. \qquad \square$$

注意到

3.1.9　设 U 是 G 的一个子群. 那么 $N_G(U)$ 是 G 的最大的以 U 为其正规子群的子群. 映射

$$\varphi : N_G(U) \to \operatorname{Aut} U, \text{ 其中}, x \mapsto (u \mapsto u^x)$$

是一个具有 $\operatorname{Ker} \varphi = C_G(U)$ 的同态. 特别地, $N_G(U)/C_G(U)$ 同构 ① 于 $\operatorname{Aut} U$ 的一个子群. $\square$

下面用从 3.1.7 得到的关于 p 群和 p 子群的两个基本性质来结束本节.

3.1.10　设 P 是 G 的一个 p 子群, p 为 $|G : P|$ 的一个因子. 那么 $P < N_G(P)$

证明　由 3.1.1(c), P 可通过右乘作用在右陪集 $Pg\,(g \in G)$ 的集合 Ω 上,

$$|\Omega| = |G : P| \equiv 0 \pmod p.$$

从 3.1.7 我们得到 (用 P 代替 G)

---

① 见 1.2.5 节的同态定理.

$$|C_\Omega(P)| \equiv |\Omega| \equiv 0 \pmod p,$$

并且因为 $P \in C_\Omega(P)$ 得 $C_\Omega(P) \neq \varnothing$. 因此存在 $Pg \in C_\Omega(P)$ 使 $P \neq Pg$. 由此得到 $g \notin P$ 且 $PgP = Pg$. 于是有 $gPg^{-1} = P$ 且 $g \in N_G(P) \backslash P$. □

3.1.11　设 P 是一个 p 群, $N \neq 1$ 是 P 的正规子群, 则 $Z(P) \cap N \neq 1$. 特别地, $Z(P) \neq 1$.

证明　P 通过共轭作用在 $\Omega := N$ 上, 则有

$$C_\Omega(P) = Z(P) \cap N.$$

因为 N 是一个 p 群, 所以从 3.1.7 得

$$|C_\Omega(P)| \equiv |\Omega| \equiv 0 \pmod p.$$

于是由 $1 \in C_\Omega(P)$ 得到 $|C_\Omega(P)| \geqslant p$. □

习　题

下设 G 是一个群.

1. 设 G 是子群 K 和正规子群 N 的半直积, 且设 $\Omega := N$. 那么

$$\omega^{kn} := \omega^k n \quad (\omega \in \Omega,\ k \in K,\ n \in N)$$

定义了 G 在 Ω 上的一个作用.

2. 如果 G 传递地作用在 Ω 上, 那么 $N_G(G_\alpha)$ 传递地作用在 $C_\Omega(G_\alpha)$ $(\alpha \in \Omega)$ 上.

3. 设 p 是 $|G|$ 的最小素因子, 则每一个指数是 p 的子群都在 G 中正规.

4. 设 $U \leqslant G$ 且 $1 \neq |G:U| \leqslant 4$, 那么 $|G| \leqslant 3$ 或 G 非单.

5. 假设 G 的类方程是

$$60 = 1 + 15 + 20 + 12 + 12,$$

那么 G 是单群.

6. 假设 G 忠实地作用在集合 Ω 上. 设 A 是 G 的一个传递作用在 Ω 上的子群. 那么 $|C_G(A)|$ 是 $|\Omega|$ 的一个因子. 若进一步假设 A 是交换群, 则 $C_G(A) = A$.

7. 设 $\varnothing \neq A \subseteq G$, 则 $A \subseteq C_G(C_G(A))$ 且 $C_G(C_G(C_G(A))) \leqslant C_G(A)$.

8. 设 A 是 G 的正规子群且有 $U \leqslant C_G(A)$. 那么 $[U, G] \leqslant C_G(A)$.

9. (a) $A \trianglelefteq G,\ U \leqslant G \Rightarrow C_U(A) \trianglelefteq U$.

   (b) A char $G \Rightarrow C_G(A)$ char G 且 $N_G(A)$ char G.

10. 设 K 是一个域, V 是 K 上的 $|G|$ 维向量空间, 则 G 同构于 $\mathrm{GL}(V)$[①] 的一个子群.

---

① $\mathrm{GL}(V)$ 是 V 上的双线性映射群; 见 8.6 节.

3.2 Sylow 定 理

本节证明 Sylow 定理. 对 $|G|$ 的每一个素数幂因子 p^i, Sylow 定理指出 G 的 p^i 阶子群是存在的[①]. 这就为借助非平凡 p 子群的正规化子来分析有限群奠定了基础, 这种方法在有限群理论中获得了极大的成功.

首先给出一个 19 世纪上半叶得到的经典定理.

3.2.1 Cauchy 定理[②] 设 G 是一个群, p 是 $|G|$ 的一个素因子. 那么 G 包含 p 阶元素; 特别地, G 中存在 p 阶子群.

证明[③] 设

$$\Omega := \{\underline{x} := (x_1, \cdots, x_p) \mid x_1, \cdots, x_p \in G,\ x_1x_2\cdots x_p = 1\}.$$

因为 $\underline{x} \in \Omega$ 的分量 $x_1, \cdots, x_{p-1}$ 可独立的选择 (而后 x_p 由它们唯一确定), 得到

$$|\Omega| = |G|^{p-1} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p).$$

注意到

$$x_1x_2\cdots x_p = 1 \Leftrightarrow x_2\cdots x_p = x_1^{-1} \Leftrightarrow x_2\cdots x_px_1 = 1,$$

所以循环群 $C_p = \langle a \rangle$ 通过

$$(x_1, x_2, \cdots, x_p) \stackrel{a}{\mapsto} (x_2, \cdots, x_p, x_1)$$

作用在 Ω 上. 因此, 由 3.1.7 得

$$|C_\Omega(\langle a \rangle)| \equiv |\Omega| \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p).$$

又因为 $\underline{1} = (1, \cdots, 1) \in C_\Omega(\langle a \rangle)$, 所以存在 $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_p) \neq \underline{1} \in C_\Omega(\langle a \rangle)$. 这证明了 $x_1 = \cdots = x_p \neq 1$ 且 $x_1^p = 1$. □

下设 p 是一个素数, G 是一个群. 设 P 是 G 的一个 p 子群, 如果 G 中不存在真包含 P 的 p 子群, 那么 P 称为 G 的 **Sylow p 子群**. 于是, G 的 Sylow p 子群是 G 的 p 子群集合 (按包含关系排序) 的极大元素. 把 G 的 Sylow p 子群的集合记作 $\mathrm{Syl}_p G$.

---

① 如果 G 是交换的, 那么对 $|G|$ 的每一个因子 n, G 都有一个 n 阶子群, 并且这点对幂零群来说也是成立的, 见 2.1.4 和 5.1 节.

② 对照文献 [37] 的第 291 页.

③ 此证明属于 J.H. McKay.

例如, 如果 p 不是 $|G|$ 的因子, 那么 $\mathrm{Syl}_p G = \{1\}$ (Lagrange 定理); 如果 G 是一个 p 群, 那么 $\mathrm{Syl}_p G = \{G\}$. 因为 G 的自同构把 Sylow p 子群映射到 Sylow p 子群, 所以子群

$$O_p(G) := \bigcap_{P \in \mathrm{Syl}_p G} P$$

是 G 的特征 p 子群. 更确切地有

3.2.2 设 N 是 G 的正规 p 子群 ①, 则 $N \leqslant O_p(G)$.

证明 设 $P \in \mathrm{Syl}_p G$, 那么 NP 是一个 p 子群 (见1.1.6). 由 P 的极大性和 $P \leqslant NP$ 得 $N \leqslant P$. □

特别地, 如果 G 的 Sylow p 子群 P 在 G 中正规, 那么 $\mathrm{Syl}_p G = \{P\}$, 且 P 是 G 的所有 p 元素的集合. 这样的群称为p 闭(p-closed) 的. 进一步, 若 G 是 p 闭的且 $xP(x \in G)$ 是 G/P 的一个 p 元, 那么 $\langle x \rangle P$ 是一个 p 群. 于是 $x \in P$. 由 Cauchy 定理知 p 不整除 $|G/P|$.

如果 P 是 G 的一个 p 子群且 $p \nmid |G:P|$, 那么由 Lagrange 定理知 $|P|$ 是最大的整除 $|G|$ 的 p 幂, 从而 $P \in \mathrm{Syl}_p G$. 一般地, 有

3.2.3 Sylow 定理 [89] 设 p^e 是整除 G 的阶的最大 p 幂, 则

(a) G 的 Sylow p 子群恰是阶为 p^e 的子群.

(b) G 的 Sylow p 子群在 G 中共轭. 特别地,

$$|\mathrm{Syl}_p G| = |G : N_G(P)|, \quad P \in \mathrm{Syl}_p G.$$

(c) $|\mathrm{Syl}_p G| \equiv 1 \pmod p$.

证明 ② 设 P 是 G 的 Sylow p 子群. 那么 P 也是

$$U := N_G(P)$$

的一个 Sylow p 子群.

因此像上面所提到的那样有

(1) U 是 p 闭的且 $|U : P| \not\equiv 0 \pmod p$.

可以断言, 有

(2) $|G : U| \equiv 1 \pmod p$.

为了证明这个结论, 考虑 P 在所有陪集 $Ug\,(g \in G)$ 的集合 Ω 上的作用. 那么有 $|\Omega| = |G : U|$, 且由 3.1.7 得

$$|C_\Omega(P)| \equiv |\Omega| \pmod p.$$

---

① 即既是一个 p 子群又是一个正规子群.

② 例如, 在文献 [97], [40] 和 [41] 中有不同的证明.

因为 $P \leqslant U$, 所以有 $U \in C_\Omega(P)$. 设 $Ug \in C_\Omega(P)$, 则 $UgP = Ug$, 这蕴含了 $gPg^{-1} \leqslant U$. 由于 U 是 p 闭的得 $gPg^{-1} = P$, 从而有 $g \in N_G(P) = U$. 由此得到 $C_\Omega(P) = \{U\}$. (2) 得证.

设 S 是 G 的另一个 Sylow p 子群. 那么 S 通过右乘也作用在 Ω 上. 于是, 由 (2) 和 3.1.7 得到存在陪集 Ug 使得 $UgS = Ug$. 由此得 $gSg^{-1} \leqslant U$, 从而由 (1) 得到 $gSg^{-1} = P$. (b) 得证.

再由 (2) 和

$$|\mathrm{Syl}_p G| = |G : N_G(P)| = |G : U|$$

得到 (c).

另外, 因为

$$|G| = |P||U : P||G : U|,$$

其中, p 不整除第 2 和第 3 个因子 ((1) 和 (2)), 所以 (a) 成立. □

下面给出上述定理的一些推论:

3.2.4　设 p^i 是 $|G|$ 的因子. 那么 G 有一个 p^i 阶的子群.

证明　对 $|G|$ 用归纳法. 由 Sylow 定理, 我们可以假设 G 是一个非平凡 p 群. 由 3.1.11 得 $Z(G) \neq 1$. 设 N 是 $Z(G)$ 的一个 p 阶子群. 那么由归纳假设 G/N 有一个子群 U/N (其中, $N \leqslant U \leqslant G$) 使得 $|U/N| = p^{i-1}$. 因此 $|U| = p^i$. □

3.2.5　设 N 是 G 的正规子群, $P \in \mathrm{Syl}_p G$, 则

$$PN/N \in \mathrm{Syl}_p G/N \text{ 且 } P \cap N \in \mathrm{Syl}_p N.$$

证明　这两个结论都可以从 3.2.3(a) 得到在子群链

$$1 \leqslant P \cap N \leqslant N \leqslant PN \leqslant G$$

中由 $PN/N \cong P/P \cap N$(见 1.2.6) 得 $|P \cap N||PN/N| = |P|$. 因此 $|N : P \cap N|$ 和 $|G : PN|$ 都不被 p 整除. □

3.2.6　设 U 是 G 的一个非 Sylow p 子群的 p 子群. 那么对 $N_G(U)$ 的每一个 Sylow p 子群 R 均有 $U < R$.

证明　如果 $P \in \mathrm{Syl}_p G$ 满足 $U < P$, 那么由 3.1.10 有 $U < N_P(U)$. 因此 U 不是 $N_G(U)$ 的极大 p 子群. 另一方面, 因为 $U \trianglelefteq N_G(U)$, U 包含在 $N_G(U)$ 的每一个 Sylow p 子群中 (见3.2.2). □

由 3.1.4 可以得到一个重要的分解, 如下:

3.2.7　Frattini 论断　设 N 是 G 的正规子群且 $P \in \mathrm{Syl}_p N$, 则 $G = N_G(P)N$.

证明 G 通过共轭作用在集合 $\Omega = \mathrm{Syl}_p N$ 上, 且 P 的稳定子是 $N_G(P)$. 进一步由 Sylow 定理, N 传递地作用在 Ω 上. 因此由 3.1.4 得结论成立. □

下面的结果是 Frattini 论断的一个应用:

3.2.8 设 N 是 G 的一个正规子群, 商群 [①]$\overline{G} := G/N$, 再令 P 是 G 的一个 p 子群. 假设 $(|N|, p) = 1$. 那么

$$N_{\overline{G}}(\overline{P}) = \overline{N_G(P)} \text{ 且 } C_{\overline{G}}(\overline{P}) = \overline{C_G(P)}.$$

证明 由商群的定义得

$$N_{\overline{G}}(\overline{P}) = \overline{N_G(NP)}.$$

因为 $(|N|, p) = 1$, 所以 P 是 NP 的 Sylow p 子群, 且 NP 是 $N_G(NP)$ 的正规子群. 因此由 Frattini 论断得到

$$N_G(NP) = NPN_{N_G(NP)}(P) = NPN_G(P) = NN_G(P),$$

从而有 $N_{\overline{G}}(\overline{P}) = \overline{N_G(P)}$ 成立.

显而易见, $\overline{C_G(P)} \leqslant C_{\overline{G}}(\overline{P})$. 设 $\overline{c} \in C_{\overline{G}}(\overline{P})$. 因 $C_{\overline{G}}(\overline{P}) \leqslant N_{\overline{G}}(\overline{P})$, 故存在 $n \in N$ 和 $y \in N_G(P)$ 使 $c = ny$. 因此得到 $\overline{c} = \overline{y}$ 和

$$Nx = (Nx)^y = Nx^y, \quad \forall x \in P.$$

换位子 $y^{-1}xyx^{-1}$ 属于 $N \cap P = 1$. 由此得到 $y \in C_G(P)$, 从而 $C_{\overline{G}}(\overline{P}) = \overline{C_G(P)}$. □

由此得到一个在后面第 11 章中所需要的结果.

3.2.9 设 $G = NH$ 是 G 的一个分解, 其中, $H \leqslant G$, $N \trianglelefteq G$ 且 $(p, |N|) = 1$. 那么对 H 的任意 p 子群 P 有

$$N_G(P) = (N \cap N_G(P))(H \cap N_G(P)).$$

证明 设 $\overline{G} := G/N$, $N_1 := N \cap H$. 由 3.2.8 得

$$N_{H/N_1}(PN_1/N_1) = N_H(P)N_1/N_1.$$

于是由同构定理 (见 1.2.6)

$$H/N_1 \cong HN/N \ (= \overline{G})$$

可证明

$$\overline{N_G(P)} = N_{\overline{G}}(\overline{P}) = \overline{N_H(P)}.$$

---

① 见 11 页"上划线记号"约定.

这蕴含了

$$N_H(P) \leqslant N_G(P) \leqslant NN_H(P),$$

从而由 Dedekind 恒等式 1.1.11 得结论成立. □

交错群 A_5 是一个阶为

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

阶的单群 (关于它的定义、阶和单性见 4.3 节). 另一方面, 运用 Sylow 定理能够证明没有阶 < 60 的非交换单群.

将用 Sylow 定理 (特别是 3.2.3(c)) 来确定 60 阶非 5 闭群的结构. 首先, 有如下两个结论:

3.2.10　设 G 不是 3 闭的且 $|G| = 12$. 那么 G 是 2 闭的.

证明　设 $S \in \mathrm{Syl}_3 G$, 那么

$$n := |\mathrm{Syl}_3 G| \xlongequal{3.2.3(b)} |G : N_G(S)|$$

是 $\dfrac{|G|}{|S|} = 4$ 的一个因子. 于是由 3.2.3(c) 得到 $n = 4$. 因为 G 的不同的 Sylow 3 子群 ($\cong C_3$) 的交是平凡的, 所以 G 中恰有

$$4 \cdot (3 - 1) = 8$$

个 3 阶元. 因此G 中最多有 4 个 2 阶元. 于是 G 包含唯一的 Sylow 2 子群. □

3.2.11　设 $|G| \in \{5, 10, 15, 20, 30\}$. 那么 G 是 5 闭的.

证明　证 $|\mathrm{Syl}_5 G| = 1$. 对 $|G| \neq 30$ 可直接从 3.2.3(b),(c) 得到. 当 $|G| = 30$ 时, 从假设 $n := |\mathrm{Syl}_5 G| > 1$ 出发导出矛盾: 再次用 3.2.3(c) 得 $n = |\mathrm{Syl}_5 G| = 6$. 由于不同的 5 阶子群的交是平凡的, 所以 G 中有 $6 \cdot 4 = 24$ 个 5 阶元素. 设 t 是 G 的对合 (见3.2.1) 而 $S \in \mathrm{Syl}_5 G$, 则因 $N_G(S) = S$ 得 $|t^S| = 5$. 因此 G 中无 3 阶元, 这和 3.2.1 矛盾. □

3.2.12　设 G 是一个非 5 闭的 60 阶群, 则

(a) G 是单群.

(b) 设 $\mathcal{M}$ 是 G 的极大子群的集合. 那么

$$\mathcal{M} = \{N_G(G_p) \mid G_p \in \mathrm{Syl}_p G,\ p \in \{2, 3, 5\}\}$$

且

$$|N_G(G_p)| = \begin{cases} 12, & p = 2, \\ 6, & p = 3, \\ 10, & p = 5. \end{cases}$$

证明 下文中, $G_p\,(p\in\pi(G))$ 总是指 G 的一个 Sylow p 子群. 由假设 $|G:N_G(G_5)|\neq 1$. 因此3.2.3 蕴含

(1) $|N_G(G_5)|=10$.

(a) 假设 G 非单, 那么 G 包含一个非平凡的真正规子群 N. 如果 $5\in\pi(N)$, 那么 N 包含 G 的一个 Sylow 5 子群 G_5, 而由 3.2.11 知 G_5 在 N 中正规. 于是 G_5 是 N 的特征子群, 从而在 G 中正规. 这和假设矛盾. 因此 $5\notin\pi(N)$, 于是 $5\in\pi(G/N)$. 由 3.2.11 得

$$1\neq G_5N/N\trianglelefteq G/N$$

且 $NG_5\trianglelefteq G$. 如上所述, 因 $5\in\pi(NG_5)$ 得 $NG_5=G$. 于是 G 的每一个非平凡的真正规子群 N 的阶为 12. 但由 3.2.10 得到 N 包含一个正规的从而是一个特征的 Sylow 子群, 从而这是 G 的一个非 12 阶的正规子群. 这最后的矛盾说明 G 是单群.

(b) 对 $p\in\{2,3\}$ 由 (a) 得 $|G:N_G(G_p)|\neq 1$. 再由 3.2.3 和 (1) 得到

(2) $|N_G(G_3)|=6$ 且 $|N_G(G_2)|\in\{4,12\}$. 由 (2) 和 3.2.10 得到

(3) G 的每一个 12 阶子群是 2 闭的.

下面证明

(4) $|N_G(G_2)|=12$.

更准确地说, 要证明如 $|N_G(G_2)|=4$, 则推出矛盾.

事实上, 由 $|N_G(G_2)|=4$ 得到 $|\mathrm{Syl}_2\,G|=15$, 且因 $|G_2|=4$, 则 G_2 是交换的. 设 $S_1,S_2\in\mathrm{Syl}_2\,G$ 使得

$$1\neq S_1\cap S_2<S_1,$$

则

$$\langle S_1,S_2\rangle\leqslant N_G(S_1\cap S_2)=:L.$$

而由 (a) 知 $L\neq G$. 如果 $5\in\pi(L)$, 那么 L 为 5 闭 (见3.2.11), 从而 $L\leqslant N_G(G_5)$, 这和 (1) 矛盾. 于是可得到 $|L|=12$. 因为 $|\mathrm{Syl}_2\,L|\geqslant 2$, 这矛盾于 (3).

因此对任何两个不同的 S_1, $S_2\in\mathrm{Syl}_2\,G$ 有 $S_1\cap S_2=1$. 由此得到 G 中有 $3\cdot 15=45$ 个 2 元素. 而另一方面, 由 (1) 得到 G 中也有 $4\cdot 6=24$ 个 5 阶元. 这个矛盾说明 (4) 成立.

设 M 是 G 的极大子群. 由 (1), (2) 和 (4), M 不是 G 的 Sylow 子群. 如果 $5\in\pi(M)$, 则由 3.2.10 得 M 为 5 闭. 因此对 $G_5\leqslant M$ 有 $M\leqslant N_G(G_5)$, 于是 $M=N_G(G_5)$.

现在可以假设 $5\notin\pi(M)$ 且 $|M|\in\{6,12\}$. 如果 $|M|=6$, 那么 M 是 3 闭且对 $G_3\leqslant M$ 有 $M=N_G(G_3)$. 如果 $|M|=12$, 那么由 (3) 得到 M 是 2 闭的, 对 $G_2\leqslant M$ 有 $M=N_G(G_2)$. □

设 G 是 3.2.12 中的群. $U := N_G(G_2)$. 那么 $|G:U| = 5$, 且由 3.1.2 得存在一个从 G 到对称群 S_5 内的单同态. 因此 G 同构于 S_5 内指数为 2 的子群 A. 设 A_5 是次数为 5 的交错群 (见 4.3 节). 那么也有 $|S_5 : A_5| = 2$, 所以 A 和 A_5 都是 S_5 中的 60 阶正规子群. 特别地, 由同态定理得到 $|A : A \cap A_5| \leqslant 2$, 从而由 A 的单性得 $A = A_5$. 这证明了每一个非 5 闭的 60 阶群同构于 A_5.

习　题

下设 G 是一个群, p 是一个素数, $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

1. 设 $N_G(S) \leqslant U \leqslant G$, 那么 $|G:U| \equiv 1 \pmod p$.

2. 对 $|G|$ 的任意素因子 p 有 $|\{g \in G | g^p = 1\}| \equiv 0 \pmod p$.

3. 设 $|G| = 168$. 问 G 中有多少个 7 阶元?

4. 每一个 15 阶群都是循环群.

5. 设 p, q, r 是不同的素数.

(a) 如果 $p > q$, 那么 pq 阶群包含一个正规的 Sylow p 子群.

(b) pqr 阶的群至少包含一个非平凡的正规 Sylow 子群.

6. 设 $H \leqslant G$ 且 $|G:H| = p^n$. 那么下面的结论成立:

(a) $O_p(H) \leqslant O_p(G)$.

(b) 如果对所有的 $x \in G \backslash H$ 有 $H \cap H^x = 1$, 那么 G 是 p 闭的.

7. 每一个阶小于 60 的非交换群都是非单的.

8. 每一个 168 阶单群都包含一个指数为 7 的子群.

9. 设对所有的 $g \in G \backslash N_G(S)$ 有 $S \cap S^g = 1$. 那么 $|\mathrm{Syl}_p G| \equiv 1 \bmod |S|$.

10. 设 $S \neq 1$ 且 $|G:S| = p+1$. 那么 $O_p(G) \neq 1$ 或 $p+1 = q^r, q \in \mathbb{P}$, 且 G 中存在一个 $p+1$ 阶的初等交换正规子群.

11. (Brodkey, [33]) 设 S 是交换群且 $O_p(G) = 1$, 那么存在 $g \in G$ 使 $S \cap S^g = 1$.

12. 假设 $G \neq 1$ 且对 G 的每一个极大子群 M 有 $|G:M| \in \mathbb{P}$. 那么 G 包含一个正规的极大子群或 $G = 1$.

3.3　正规子群的补

寻找正规子群的补是群论的基本问题之一. 一般情况下, 这样的补是不存在的. 例如, 因四元数群 Q 中只有一个对合 (见 1.3 节习题 8), 所以 Q 的中心没有补; 同样, 循环群的真子群没有补.

这就提出了寻求合适的条件使得补存在的问题. 例如, 设群 G 有一个正规子群 K 满足 G/K 是一个 p 群且 p 不整除 $|K|$. 那么 Sylow 定理证明了 G 的 Sylow p 子群是 K 的补. 特别地, K 的所有补在 G 中共轭.

本节运用 Wielandt 的一个方法在更一般的情形下证明类似的结论[1].

下设 K 是 G 的交换子群, $\mathcal{S}$ 是 K 在 G 中的所有代表系 (见 1.1.9).

对 $R, S \in \mathcal{S}$ 定义

$$R|S := \prod_{\substack{(r,s) \in R \times S \\ Kr = Ks}} (rs^{-1}) \ (\in K).$$

注意

$$Kr = Ks \Leftrightarrow rs^{-1} \in K.$$

因为 K 是交换的, 所以不考虑上面乘积中的因子的顺序.

对 $R, S, T \in \mathcal{S}$ 有

(1) $(R|S)^{-1} = S|R$.

(2) $(R|S)(S|T) = R|T$.

进一步假设 K 是 G 的一个正规子群. 那么 $\mathcal{S}$ 中的每一个 S 也是 K 在 G 中的左陪集代表系, 即

$$G = \dot{\bigcup_{s \in S}} sK.$$

G 由左乘作用在 $\mathcal{S}$ 上 (见 45 页)

$$(S, x) \mapsto xS, \quad x \in G,\ S \in \mathcal{S}.$$

特别地, 有

(3) $kR|S = k^{|G:K|}(R|S),\ k \in K$.

$$xR|xS = \prod_{\substack{Kxr = Kxs \\ (r,s) \in R \times S}} x(rs^{-1})x^{-1} = x(R|S)x^{-1}$$

蕴含

(4) $R|S = 1 \Rightarrow xR|xS = 1$.

进一步假设 $|K|$ 和 $|G/K|$ 互素. 那么因 K 是交换的, 映射

$$\alpha : K \to K : k \mapsto k^{|G/K|}$$

是 K 的自同构 (见 39 页 2.2.1). 于是 (3) 蕴含了

(5) 对于 $k := (R|S)^{-\alpha^{-1}}$, $kR|S = 1$

(即 $k^{|G/K|} = (R|S)^{-1}$), 且

---

[1] Gaschüts 定理的证明思想是 G.Glauberman 提供的.

(6) $R|S = 1 = kR|S \Rightarrow k = 1$.

结论 (1) ~ (6) 是下面的主要结果证明的关键步骤:

3.3.1　Schur-Zassenhaus 定理①　设 K 是 G 的满足 $(|K|, |G:K|) = 1$ 的交换正规子群. 那么 K 在 G 中有补且 K 的所有补在 G 中共轭.

证明　因为 (1) 和 (2), 所以

$$R \sim S \Leftrightarrow R|S = 1$$

是一个 $\mathcal{S}$ 上的一个等价关系. 设 $\widetilde{R}$ 是包含 R 的等价类. 由 (4),

$$\widetilde{S}^x := \widetilde{x^{-1}S} \quad (x \in G)$$

定义了 G 在 $\mathcal{S}/\sim$ 上的一个作用. 如果 $R, S \in \mathcal{S}$ 且 k 如同在 (5) 中定义, 那么 $\widetilde{R}^k = \widetilde{S}$, 即 K 传递地作用在 $\mathcal{S}/\sim$ 上. 另一方面, 由 (6) 得 $\widetilde{R}$ 在 K 中的稳定子是平凡的. 因此 Frattini 论断证明了稳定子

$$G_{\widetilde{R}} = \{x \in G |\ xR|R = 1\}$$

是 K 在 G 中的补. 反之, 如果 X 是 K 在 G 中的补, 那么对所有的 $x \in X$ 有 $xX = X$ 和 $xX|X = 1$. 于是对 $X = R$ 有 $X = G_{\widetilde{R}}$, 而因 K 传递地作用在 $\mathcal{S}/\sim$ 上, 由 3.1.3 得到 K 的所有补在 G 中共轭. □

在第 6 章将把 Schur-Zassenhaus 定理推广到 K 是非交换群的情形 (见 96 页 6.2).

现在考虑更一般的情况. 设

$$K \leqslant U \leqslant G \text{ 且 } K \trianglelefteq G.$$

如果 H 是 K 在 G 中的补, 那么 $H \cap U$ 是 K 在 U 中的补 (Dedekind 恒等式). Gaschütz 定理研讨了相反的蕴含情形, 当 $K = U$ 时, 这个定理和 Schur-Zassenhaus 定理一致, 但与这个结果不同的是, Gaschütz 定理没有把它推广到非交换群 K 上.

3.3.2　Gaschütz 定理 [48]　设 K 是 G 的交换正规子群, U 是 G 的满足

$$K \leqslant U \text{ 且 } (|K|, |G:U|) = 1$$

的子群.

(a) 假设 K 在 U 中有补, 那么 K 在 G 中有补.

(b) 假设 H_0 和 H_1 是 K 在 G 中的两个补, 满足

$$H_0 \cap U = H_1 \cap U,$$

① 对照文献 [82] 和 [19] 的 126 页.

那么 H_0 和 H_1 在 G 中共轭.

证明 应该注意的是: 如果 $U = K$, 那么下面的证明和 3.3.1 的证明一致. 设 A 是 K 在 U 中的补, 即

(i) $U = KA,\ K \cap A = 1$.

设 $\mathcal{L}$ 是 U 在 G 中的左陪集代表系的集合, 设 S_0 是 $\mathcal{L}$ 中的一个固定元素. 那么对每一个左陪集 $L \in \mathcal{L}$ 和 $\ell \in L$ 有

(ii) $\ell = s_\ell k_\ell a_\ell$, 其中, $s_\ell \in S_0,\ k_\ell \in K,\ a_\ell \in A$ 且 $s_\ell U = \ell U$,

并且因为 (i) 而有 ℓ 在 (ii) 中的分解是唯一的. 特别地, 对每一个 $\ell \in L$ 都恰存在一个 $\ell_0 \in S_0K$ 使 $\ell A = \ell_0 A$*, 即 $\ell_0 := s_\ell k_\ell$. 因此,$\mathcal{L}$ 中每一个 L 都对应

$$\mathcal{S} := \{L \in \mathcal{L} | L \subseteq S_0K\}$$

中的一个元素 $L_0 := \{\ell_0 | \ell \in L\}$ 使 $LA = L_0A$. 由在 (ii) 中分解的唯一性也得到

(iii) L_0 是 $\mathcal{S}$ 中唯一使 $LA = L_0A$ 的元素.

对 $x \in G$ 和 $\mathcal{L}$ 中的左陪集代表系 xL, 有

$$(xL)_0A = xLA = xL_0A = (xL_0)_0A.$$

于是由 (iii) 得到

(iv) $(xL)_0 = (xL_0)_0, \forall L \in \mathcal{L}$.

现在定义

(v) $S^x := (x^{-1}S)_0, S \in \mathcal{S},\ x \in G$.

由

$$(S^x)^y = (y^{-1}(x^{-1}S)_0)_0 \overset{\text{(iv)}}{=} (y^{-1}(x^{-1}S))_0 = ((xy)^{-1}S)_0 = S^{(xy)},$$

(v) 定义了 G 在 $\mathcal{S}$ 上的一个作用. 下面用记号 $(xS)_0$ 来替代 $S^{x^{-1}}$, 这样, 可以采用以下的比在本节开始介绍的记号稍微一般一些的记号:

$$R|S := \prod_{\substack{(r,s) \in R \times S \\ Kr = Ks}} (rs^{-1}), \quad R, S \in \mathcal{S}.$$

首先, 对这个更一般的设定讨论结论 (1) ~ (6).

(1) 和 (2) 的证明和前面相同. 对 (3) 的证明, 注意到对 $k^{-1} \in K$ 和 $S \in \mathcal{S}$ 有

$$kS \subseteq kS_0K = S_0K,$$

于是由 (iii) 得到 $kS = (kS)_0 \in \mathcal{S}$. 这蕴含了

---

* 原书此处有误.—— 译者注

(3) 对 $k \in K$ 和 $S, R \in \mathcal{S}$ 有 $(kS)_0|R = k^{|G:K|}(S|R)$.

为证明 (4), 设 $x \in G$ 和 $(r,s) \in R \times S$ 满足 $Kr = Ks$, 这里 $R, S \in \mathcal{S}$. 用这里给出的记号, 应用 (ii), 则有

$$xr = s_{xr}k_{xr}a_{xr} \text{ 且 } xs = s_{xs}k_{xs}a_{xs}.$$

从而由 $xrK = xsK$ 得到

$$s_{xr}Ka_{xr} = s_{xs}Ka_{xs}.$$

这蕴含了 $s_{xr} = s_{xs}$, 再因 $K \cap A = 1$, 有 $a_{xr} = a_{xs}$. 因此得到

$$(xr)_0(xs)_0^{-1} = xra_{xr}^{-1}(xsa_{xs}^{-1})^{-1} = xrs^{-1}x^{-1}.$$

于是

$$\text{对所有的 } x \in G \text{ 和 } R, S \in \mathcal{S}, \text{ 有 } (xR)_0|(xS)_0 = x(R|S)x^{-1}.$$

而结论 (4) ~ (6) 的证明同本节的开始一样. 如同在 Schur-Zassenhaus 定理中的证明,

$$R \sim S \Leftrightarrow R|S = 1$$

定义了一个在 $\mathcal{S}$ 上的等价关系. 再由 G 和 K 在 $\mathcal{S}/\sim$ 上的作用, 同 Schur-Zassenhaus 定理中的证明那样也得到补的存在性.

设 H_0, H_1 所设定如同 (b) 中的. 那么

$$A := U \cap H_0 = U \cap H_1$$

是 K 在 U 中的补, 且 A 在 H_i $(i=0,1)$ 中的左陪集代表系也是 U 在 G 中的左陪集代表系. 设 S_0 是 A 在 H_0 中的一个固定的左陪集代表系, $\mathcal{S}$ 是同前面那样和 S_0 相关的定义. 对每一个 $s \in S_0$ 都存在 $k_s \in K$ 使 $sk_s \in H_1$ (如果 $s \in H_0 \cap H_1$, 那么 $k_s = 1$). 于是

$$S_1 := \{sk_s | s \in S_0\}$$

是 A 在 H_1 中满足 $S_1 \in S_0K$, 即 $S_1 \in \mathcal{S}$ 的左陪集代表系.

由 (ii), 对每一个 U 在 G 中的包含于 H_i 的左陪集代表系 L_i 有 $(L_i)_0 = S_i$. 特别地, 对所有的 $x \in H_i$ 有 $(xS_i)_0 = S_i$. 因此, H_i 固定 $\mathcal{S}/\sim$ 上的包含于 S_i $(i=0,1)$ 的等价关系类.

同 3.3.1 中的证明那样,G 在 $\mathcal{S}/\sim$ 上的传递作用蕴含了 H_0 和 H_1 在 G 中共轭. □

习 题

下设 G 是一个群, $\Phi(G)$ 是 G 的所有极大子群的交[①].

1. 设 N 是 G 的交换极小正规子群. 那么 N 在 G 中有补当且仅当 $N \not\leqslant \Phi(G)$.

2. 设 N 是 G 的满足 $N \cap \Phi(G) = 1$ 的交换正规子群. 那么 N 在 G 中有补.

3. 设 N_1, N_2 是 G 的正规子群. 如果 N_i 在 G 中有补 L_i $(i = 1, 2)$ 使得 $N_2 \leqslant L_1$, 那么 N_1N_2 在 G 中也有补.

4. 设 $p \in \pi(G)$, K 是 G 的初等交换正规 p 子群满足

$$K = \langle K \cap Z(S) | S \in \mathrm{Syl}_p\, G \rangle.$$

那么 $K = [K, G]C_K(G)$.

① $\Phi(G)$ 称为 G 的 Frattini 子群; 见 5.2.3.

第4章　置　换　群

设 Ω 是一个集合. 忠实地作用在 Ω 上的群 G 称为 Ω 上的**置换群**(permutation group). 每一个置换群都同构于 S_Ω 的一个子群, S_Ω 的每一个子群都是 Ω 上的一个置换群.

置换群的概念不仅有它自身的意义, 并且也可一般地用来研讨和描述群.

4.1　传递群和 Frobenius 群

下设 G 是作用在集合 Ω 上的群. 假设 G 也作用在另一个集合 Ω' 上. 如果存在双射 $\rho:\Omega\to\Omega'$ 使

$$\text{对任意的 } \beta\in\Omega,\ x\in G \text{ 都有 } (\beta^x)^\rho=(\beta^\rho)^x,$$

则称这两个作用是**等价的**(equivalent). 从现在起, 总假设 G 传递地作用在 Ω 上. 设 α 是 Ω 中一个固定元素. 令

$$U:=G_\alpha,\quad \Omega':=\{Ug|g\in G\}.$$

那么 G 通过右乘作用在 Ω' 上 (见 45 页 3.1.1(c)). 同 3.1.5 的证明中一样, 对 $g\in G$, 有

$$Ug=\{x\in G|\alpha^x=\alpha^g\}.$$

因此映射

$$\rho:\Omega\to\Omega',\ \text{其中},\ \alpha^g\mapsto Ug$$

是满足

$$((\alpha^g)^x)^\rho=(\alpha^{gx})^\rho=Ugx$$

的双射.

于是有

4.1.1　设 G 传递地作用在 Ω 上, $\alpha\in\Omega$. 那么这个作用等价于 G 由右乘在 G_α 的右陪集集合上的作用. □

在此意义下, G 的每一个传递作用都可以理解为 G 在它某一个子群的右陪集上的作用[①]. 因此, 每一个关于 G 传递作用在 Ω 上的结论都可以转换为有关 G 的

① 反之, 每一个这样的作用都是传递的.

内部结构的结论.

如果对每一个元素 $(\alpha, \beta) \in \Omega \times \Omega$ 都恰存在一个 $g \in G$ 使 $\alpha^g = \beta$, 那么称 G 在 Ω 上的作用是**正则的**(regular). 如果 N 是 G 的正则作用在 Ω 上的正规子群, 那么 N 称作 G 的**正则正规子群**(regular normal subgroup).

4.1.2 下面的命题是等价的:

(i) G 正则地作用在 Ω 上.

(ii) G 传递地作用在 Ω 上, 且对某个 $\gamma \in \Omega$ 有 $G_\gamma = 1$.

证明 由定义即得 (i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). 设 $\alpha, \beta \in \Omega$ 且 $x, y \in G$ 使 $\alpha^x = \alpha^y = \beta$, 即 $xy^{-1} \in G_\alpha$. 由 3.1.3, G_α 与 G_γ 共轭, 于是 $x = y$. □

4.1.3 设 G 是在 Ω 上的交换传递置换群. 那么 G 正则地作用在 Ω 上.

证明 因 G 是交换的, 所以对所有的 $g \in G$ 和 $\alpha \in \Omega$ 有 $(G_\alpha)^g = G_\alpha$. 因此 G_α 固定 $\alpha^G = \Omega$ 中的每一个元素. 由此得到 $G_\alpha = 1$, 再由 4.1.2 得出 G 的正则性. □

4.1.4 设 $\alpha \in \Omega$, N 是 G 的正则正规子群. 对 $\beta \in \Omega$, 设 x_β 是 N 中唯一的使 $\alpha^{x_\beta} = \beta$ 的元素. 那么对所有的 $\beta \in \Omega$ 和 $g \in G_\alpha$ 有

$$(x_\beta)^g = x_{\beta^g}.$$

特别地, G_α 在 $\Omega \setminus \{\alpha\}$ 上的作用等价于 G_α 在 $N^\#$ 上的共轭作用.

证明 有 $\beta^g = (\alpha^{x_\beta})^g = (\alpha^g)^{g^{-1}x_\beta g} = \alpha^{(x_\beta)^g}$. □

现在介绍一类在以后的章节中起到重要作用的置换群, 它们的内部结构是众所周知的.

设 G 是 Ω 上的置换群且 $|\Omega| > 1$. 如果 G 满足

- G 传递地作用在 Ω 上.
- 对任意的 $\alpha \in \Omega$ 有 $G_\alpha \neq 1$.
- 对所有的 $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \neq \beta$ 有 $G_\alpha \cap G_\beta = 1$,

则称 G 是 Ω 上的**Frobenius 群**. 设 G 是 Ω 上的 Frobenius 群, $\alpha \in \Omega$ 且

$$H := G_\alpha.$$

由 G 在 Ω 上的传递作用得到

$$\{H^g \mid g \in G\} = \{G_\beta \mid \beta \in \Omega\},$$

且 $F := G \setminus \bigcup_{g \in G} H^g$ 是 G 的在 Ω 上没有任意固定点的元素的集合. 设

$$K := F \cup \{1_G\}.$$

那么

$$\mathcal{F} \quad G^{\#} = K^{\#} \dot{\cup} \dot{\bigcup_{g \in G}} (H^g)^{\#}$$[1]

是 $G^{\#}$ 的一个划分[2].

4.1.5 $|\Omega| = |K| = |G:H| \equiv 1 \pmod{|H|}$.

证明 $\mathcal{F}$ 蕴含了

$$|K| = |G| - |G:H|(|H|-1) = |G:H| = |\Omega|.$$

由假设得到对所有的 $\beta \in \Omega \backslash \{\alpha\}$ 有 $H \cap G_\beta = 1$. 因此, H 在 $\Omega \backslash \{\alpha\}$ 上所有的轨道长均为 $|H|$ (见3.1.5). 于是可得 $|\Omega| \equiv 1 \pmod{|H|}$. □

子群 H 称为 G 的一个**Frobenius 补**(complement). 显然所有和 H 共轭的子群也是 G 的 Frobenius 补. 集合 K 是相应的 G 的**Frobenius 核**(kernel).

关于 Frobenius 群的基本结论是下面的 Frobenius 定理. 对这个定理, 除了特殊情形外, 不给出证明.

4.1.6 Frobenius 定理 Frobenius 群的 Frobenius 核是一个正规子群.

由这个定理得知 Frobenius 群 G 是它的 Frobenius 补 H 和 Frobenius 核 K 的半直积. 特别地, K 传递地作用在 Ω 上, 所以 K 是 G 的正则正规子群.

因 K 在 G 的元素的共轭作用下是不变的, 所以要证明 4.1.6 只要证明 K 是一个子群即可. 用特征标理论可证得此结果[3]. 到现在为止, 对此结果还没有纯群论的证明. 但在 $|H| \equiv 0 \pmod 2$ 情形下, 对对合用初等计算可得到这个结论. 在 66 页将给出证明.

下面给出在本节开始所评注的意义下, Frobenius 群的内部结构描述:

4.1.7 设 G 是一个群, H 是 G 的一个非平凡真子群且 $\Omega = \{Hg | g \in G\}$. 那么下面的论述是等价的:

(i) G 是一个在 Ω 上的 Frobenius 群, H 是其 Frobenius 补.

(ii) 对所有的 $g \in G \backslash H$ 有 $H \cap H^g = 1$.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 对 $g \in G \backslash H$ 与 $\alpha := H \in \Omega$, 元素 $\beta := \alpha^g \in \Omega$ 不同于 α 且 $G_\beta = H^g$ (见3.1.3), 由此得到 $H \cap H^g = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). G 由右乘传递地作用在 Ω 上. 设 $\alpha = Hg_1$, $\beta = Hg_2$ 是 Ω 的两个不同的元素. 那么 $g := g_2 g_1^{-1} \in G \backslash H$ 且

$$G_\alpha \cap G_\beta = H^{g_1} \cap H^{g_2} = (H \cap H^g)^{g_1} = 1.$$ □

---

① $K^{\#} := F$.

② 这个划分是 G 的**Frobenius 划分**(patition).

③ 例如, 见文献 [46], 更近一点的, 见文献 [9].

用 4.1.7 得到 Frobenius 群的第 2 个定义. 群 G 的一个非平凡真子群称为 G 的**Frobenius 补**(complement), 如果对任意的 $g \in G \setminus H$ 有

$$H \cap H^g = 1.$$

若 G 有一个这样的 Frobenius 补 H, 则称 G 为 (关于 H 的)**Frobenius 群**. 同前所述,

$$K := \left(G \setminus \bigcup_{g \in G} H^g \right) \cup \{1\}$$

称为 G 的 (关于 H 的)**Frobenius 核**(kernel). 由 4.1.7, 群 G 是在集合 $\Omega := \{Hg | g \in G\}$ 上的 Frobenius 群.

第二定义看起来似乎比用置换群给出的定义更一般些. 而将在 148 页 8.3.7(运用 4.1.6) 中看到, 在 Frobenius 群 (在第二定义的意义下) 中所有的 Frobenius 补共轭.

首先是两个评注, 它们的证明不需要 4.1.6.

4.1.8 设 G 是以 H 为 Frobenius 补和 K 为 Frobenius 核的 Frobenius 群.

(a) 设 U 是使 $U \not\leqslant K$ 的 G 的子群, 且 $x \in G$ 使 $H^x \cap U \neq 1$. 那么或者 $U \leqslant H^x$ 或者 U 是以 $H^x \cap U$ 为 Frobenius 补, $U \cap K$ 为 Frobenius 核的 Frobenius 群.

(b) 设 H_0 是 G 的另一个满足 $|H_0| \leqslant |H|$ 的 Frobenius 补. 那么 H_0 和 H 的某个子群共轭.

证明 因为 H 是 G 的一个 Frobenius 补, 所以有

$$\left| \bigcup_{g \in G} H^g \right| = |G:H|(|H|-1)+1 = |G| - |G:H| + 1.$$

于是得

(′) $\left| \bigcup_{g \in G} H^g \right| > \frac{|G|}{2}.$

(a) 可假设 $H = H^x$ 且 $U \cap H \neq U$. 对 $u \in U \setminus (H \cap U)$ 有 $H \neq H^u$ 且

$$(H \cap U) \cap (H \cap U)^u \leqslant H \cap H^u = 1.$$

因此 $H \cap U$ 是 U 的 Frobenius 补.

设 $g \in G$ 使 $H^g \cap U \neq 1$. 如果 $U \leqslant H^g$, 那么 $H \cap H^g \neq 1$. 于是 $H = H^g$. 这和 $U \cap H \neq U$ 矛盾. 因此 $1 \neq H^g \cap U \neq U$, 从而 $H^g \cap U$ 也是 U 的 Frobenius 补. 把 (′) 应用到 U 及其两个 Frobenius 补 $H \cap U$ 和 $H^g \cap U$ 上得到必存在 $u_1 \in U$ 使得

$$(H \cap U) \cap (H^g \cap U)^{u_1} \neq 1.$$

由此得到 $H \cap H^{gu_1} \neq 1$. 于是 $H^{gu_1} = H$ 且 $(H^g \cap U)^{u_1} = H \cap U$. 这样证明了

$$\bigcup_{u \in U} (H \cap U)^u = \bigcup_{g \in G} (H^g \cap U).$$

因此 $K \cap U$ 是 U 的 (关于 $H \cap U$ 的)Frobenius 核.

(b) 假设对所有的 $x \in G$ 有 $H_0 \not\leqslant H^x$. 那么 (a) 蕴含了在 $U := H_0$ 时有

$$m := |H_0^{\#} \cap K| \geqslant 1.$$

因为 H_0 是 G 的 Frobenius 补且 K 在共轭下是不变的, 得

$$|G : H| \overset{4.1.5}{=\!=} |K| \geqslant \left| \bigcup_{x \in G} (H_0^{\#} \cap K)^x \right| + 1 = m|G : H_0| + 1.$$

另一方面, 由假设 $|H_0| \leqslant |H|$, 便有

$$|G : H_0| \geqslant |G : H|,$$

得到矛盾. □

Frobenius 群例

• $2n$ 阶的二面体群 D_{2n}, n 是大于 1 的奇数, 其中, Frobenius 补是其 2 阶子群.

• 设 K 是有限域. 那么乘群 K^* 由右乘作用在加群 $K(+)$ 上. 相应的半直积 $K^* \ltimes K(+)$ 是以 Frobenius 补为 K^* 的 Frobenius 群.

情形为 $|H| \equiv 0 \pmod 2$ 时的 4.1.6(Bender) 的证明.

设 t 是 H 中的一个对合, $g \in G \backslash H$. 那么或者

$$a := tt^g = [t, g]$$

在 K 中, 或者存在 $x \in G$ 使 $1 \neq a \in H^x$. 在后一种情形, 因 $a^t = a^{-1} = a^{t^g}$, 有

$$a \in H^x \cap H^{xt} \cap H^{xt^g}.$$

于是得到 $H^x = H^{xt} = H^{xt^g}$ 且 $t, t^g \in H^x$. 故 $H^x = H$, 这和 $t \in H$ 但 $t^g \notin H$ 矛盾. 因此证明了

(∗) $tt^g \in K$, 若 $g \in G \backslash H$.

设 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ 是 H 在 G 中的陪集代表系, $n := |G : H|$. 因为

$$tt^{g_i} = tt^{g_j} \Leftrightarrow t^{g_i} = t^{g_j} \Leftrightarrow t^{g_i g_j^{-1}} = t \Leftrightarrow g_i g_j^{-1} \in H,$$

所以 $tt^{g_1}, \cdots, tt^{g_n}$ 两两不同. 于是因为 $|K| = n$ 得

$$K = \{tt^{g_1}, \cdots, tt^{g_n}\}.$$

在 t 的共轭下, 得到

$$K = \{t^{g_1}t, \cdots, t^{g_n}t\}.$$

同上面所提到的那样, 只要证明 K 是一个子群就可以了, 即证明 $KK \subseteq K$. 对每一个 $t^{g_i}t$ 存在 g_s 使 $t^{g_i}t = tt^{g_s}$. 因此

$$(tt^{g_i})(tt^{g_j}) = t(t^{g_i}t)t^{g_j} = t(tt^{g_s})t^{g_j} = t^{g_s}t^{g_j} = (tt^{g_j g_s^{-1}})^{g_s} \overset{(*)}{\in} K^{g_s} = K. \qquad \square$$

4.2 本 原 作 用

同前, G 是一个作用在集合 Ω 上的群. 设 Δ 是 Ω 的一个非空子集, 如果对每一个 $g \in G$ 有

$$\Delta^g \neq \Delta \Rightarrow \Delta^g \cap \Delta = \varnothing^{①},$$

则称 Δ 为**非本原集**(set of imprimitivity). 显然 Δ^g 也是一个非本原集.

对 $\alpha \in \Omega$, $G_\alpha \leqslant H \leqslant G$, 设

$$\Delta := \alpha^H.$$

对所有的 $g \in G \backslash H$,

$$\Delta^g = \alpha^{Hg}$$

和 Δ 的交为空集, 即 Δ 是一个非本原集.

假设 G 传递地作用在 Ω 上. 设 $\alpha \in \Omega$ 且 Δ 是一个包含 α 的非本原集. 那么

$$\Delta = \alpha^H,$$

其中,

$$H := G_\Delta := \{x \in G | \Delta^x = \Delta\}.$$

于是包含 α 的非本原集对应于 G 的包含 G_α 的子群.

设 Δ 是一个非本原集且 $\Sigma := \{\Delta^g | g \in G\}$. 由 G 在 Ω 上的传递作用得到

$$\Omega = \bigcup_{\Delta^g \in \Sigma} \Delta^g.$$

因此, G 在 Ω 上的作用可以理解为 G 在 Σ 上的传递作用和 G_Δ 在 Δ 上的传递作用的合成.

G 在 Ω 上的作用称为**非本原的**(imprimitive), 如果存在非本原集 Δ 使

$$1 \neq |\Delta| \neq |\Omega|^{②};$$

① $\Delta^g := \{\alpha^g | \alpha \in \Delta\}$.

② 也有 $1 \neq |\Sigma| \neq |\Omega|$.

否则, 这个作用称为是**本原的**(primitive).

在本节中讨论本原情形, 后面的 4.4 节将讨论非本原情形. 从上面的讨论中得到

4.2.1　设 G 传递地作用在 Ω 上, 那么 G 在 Ω 上的作用是本原的当且仅当 G_α $(\alpha \in \Omega)$ 是 G 的极大子群. □

4.2.2　设 G 是 Ω 上的本原置换群, $1 \neq N \trianglelefteq G$. 那么 N 传递作用在 Ω 上. 如果进一步假设 N 在 Ω 上正则, 那么 N 是 G 的极小正规子群.

证明　设 $\alpha \in \Omega$. 由 4.2.1,G_α 是 G 的极大子群. 如果 $N \leqslant G_\alpha$, 那么 N 平凡地作用在 $\Omega = \alpha^G$ 上 (见 46 页 3.1.3), 这和 $N \neq 1$ 矛盾. 于是有 $G_\alpha < G_\alpha N = G$, 从而得到 $\Omega = \alpha^G = \alpha^N$.

假设 N 正则作用在 Ω 上. 那么 G 的每一个满足 $1 \neq M \leqslant N$ 的正规子群 M 也在 Ω 上正则. 由此得到

$$|N| = |\alpha^N| = |N| = |\Omega| = |\alpha^M| = |M|,$$

于是 $N = M$. □

对 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \leqslant |\Omega|$, 设

$$\Omega^{(n)} := \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \Omega^n | \alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j\}.$$

称 G 在 Ω 上是 n **重传递的**(n-fold transitive), 如果对任何两个元素 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \Omega^{(n)}$, 都存在 $g \in G$ 使

$$\alpha_i{}^g = \beta_i, \quad i = 1, \cdots, n,$$

即由

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)^g := (\alpha_1{}^g, \cdots, \alpha_n{}^g), \quad g \in G$$

定义的 G 在 $\Omega^{(n)}$ 上通过**分量的作用**是传递的. 显然, 对所有的 $1 \leqslant m \leqslant n$, n 重传递蕴含了 m 重传递. 假设 G 在 Ω 上是 $n-1$ 重传递的, 那么 G 在 Ω 上 n 重传递当且仅当对 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \Omega^{(n-1)}$ 稳定子

$$G_{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}} := \bigcap_{i=1}^{n-1} G_{\alpha_i}$$

在 $\Omega \backslash \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}\}$ 上传递.

4.2.3　设 $\alpha \in \Omega$. 假设 G 传递地作用在 Ω 上. 那么 G 在 Ω 上是 2 重传递的当且仅当对 $g \in G \backslash G_\alpha$ 有

$$G = G_\alpha \cup G_\alpha g G_\alpha.$$

证明 由 4.1.1, Ω 可等同于陪集 $G_\alpha g$, $g \in G$ 的集合. G_α 在 $\Omega \backslash \{\alpha\}$ 上的传递性蕴含了对 $G_\alpha g \neq G_\alpha$ 有

$$G_\alpha g G_\alpha = G \backslash G_\alpha. \qquad \square$$

从 4.2.3 和 4.2.1 可以得到

4.2.4 每一个 2 重传递置换群都是本原的. $\square$

对称群 S_n 和交错群 A_n 分别是 n 重传递群和 $n-2$ 重传递群的例子. 这些群将在下一节介绍. 值得注意的是除了这两类群以外不存在 6 重或 6 重以上的传递群①.

这里仅需注意

4.2.5 设 G 是 Ω 上的 n 重传递置换群, 其中, $|\Omega| \geqslant 3$. 假设 G 包含了一个正则正规子群 N, 那么 $n \leqslant 4$. 更确切地有

(a) 当 $n=2$ 时, N 是一个初等交换 p 群.

(b) 当 $n=3$ 时, N 是一个初等交换 2 群或 $N \cong C_3$ 且 $G \cong S_3$.

(c) 当 $n=4$ 时, $N \cong C_2 \times C_2$ 且 $G \cong S_4$.

证明 设 $n \geqslant 2$ 且 $\alpha \in \Omega$. 那么 G_α 在 $\Omega \backslash \{\alpha\}$ 上 $n-1$ 重传递, 于是 G_α 也在 $N^\#$ 上 $n-1$ 重传递 (见 4.1.4). 这证明了对所有的 x, $y \in N^\#$ 存在 $g \in G_\alpha$ 使得 $x^g = y$. 因此, $N^\#$ 的每一个元素的阶相同, 这个阶是某个素数 p (见 1.4.3). 此时由 Cauchy 定理得到 N 是一个 p 群, 于是因为 $Z(N) \neq 1$(见 49 页 3.1.11) 而有 N 是一个初等交换群.

设 $n \geqslant 3$, 则有 $3 \leqslant |N| = |\Omega|$. 如果 $|N| = 3$, 那么 $G \cong S_3$. 假设 $|N| \geqslant 4$, 且设 x_1, x_2, x_3 是 $N^\#$ 的 3 个不相同的元素. 因为 G_α 在 $N^\#$ 上 2 重传递, 所以存在 $g \in G_\alpha$ 使

$$x_1^g = x_1 \text{ 且 } x_2^g = x_3.$$

如果 $p \geqslant 3$, 那么 $x_1 \neq x_1^{-1}$; 再令 $x_2 := x_1^{-1}$, 有 $x_2^g = x_2$, 得到矛盾. 于是N 是一个初等交换 2 群.

设 $n \geqslant 4$. 那么 $|\Omega| \geqslant 4$, 同上得到 N 是阶至少为 4 的初等交换 2 群. 设 $U = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle$ 是 N 的一个 4 阶子群. 假设 $U \neq N$. 选取 $x_3 = x_1 x_2$, $x_4 \in N \backslash U$. 因为 G_α 在 $N^\#$ 上 3 重传递, 所以存在 $g \in G$ 使 $x_1^g = x_1$, $x_2^g = x_2$ 且 $x_3^g = x_4$, 这和

$$x_3^g = (x_1 x_2)^g = x_1^g x_2^g = x_1 x_2 \in U$$

矛盾. 这就证明了 $|\Omega| = 4$, 于是 $n = 4$. $\square$

---

① 这个结论从单群分类定理得到.

4.3 对 称 群

n **次对称群** S_n(symmetric group S_n of degree n) 是由集合

$$\Omega := \{1, \cdots, n\}$$

上的所有的置换组成的群.

于是 S_n 的阶是 $n!$, 且由定义知 S_n n 重传递地作用在 Ω 上.S_n 中的一个置换 z 叫做**长度为 k 的轮换**(cycle of length k)(或 k**轮换**(k–cycle)), 如果 Ω 中存在 k 个不同的元素 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 使

$$\alpha_i{}^z = \alpha_{i+1}, \quad i = 1, \cdots, k-1, \ \alpha_k{}^z = \alpha_1$$

且

$$\beta^z = \beta, \quad \forall \beta \in \Omega \backslash \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}.$$

这时把 z 记作 $(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k)$. 于是对 $g \in S_n$ 有

(*) $g^{-1}(\alpha_1\cdots\alpha_k)g = (\alpha_1\cdots\alpha_k)^g = (\alpha_1{}^g\cdots\alpha_k{}^g)$.

称轮换 $z' = (\beta_1\cdots\beta_r)$ 与 z **不相交**(disjoint), 如果

$$\{\beta_1, \cdots, \beta_r\} \cap \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\} = \varnothing.$$

此时 $zz' = z'z$. 显然每一个置换都可以唯一地写成两两不相交, 从而可交换的轮换乘积的形式

(**) $x = (\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1k_1})(\alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2k_2})\cdots(\alpha_{s1}, \cdots, \alpha_{sk_s})$.

这些轮换 $(\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{ik_i})$ 对应于 $\langle x\rangle$ 作用在 Ω 上的轨道, 从而是 Ω 的一个分划. 根据它们的长度 $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_s$ 重新排序之后, 有序组 $(k_1, \cdots, k_s)$ 称为 x 的**型 (type)**. 长度为 1 的轮换就是 x 在 Ω 上的不动点, 在表示 (**) 中常常被省略.

4.3.1　S_n 的两个置换是共轭的当且仅当它们有相同的型.

证明　根据 (*), k 轮换的共轭还是 k 轮换. 因此共轭元素的型相同. 反之, 设 x 同 (**) 中所设定且

$$x' = (\alpha'_{11}, \cdots, \alpha'_{1k_1})(\alpha'_{21}, \cdots, \alpha'_{2k_2})\cdots(\alpha'_{s1}, \cdots, \alpha'_{sk_s}).$$

那么 x 和 x' 的型相同. 设 $a \in S_n$ 满足 $a: \alpha_{ij} \mapsto \alpha'_{ij}$, 则由 (*) 得到 $x^a = x'$.　□

S_n 的 2 轮换称为**对换**(transposition). 对 $k \geqslant 2$ 每一个 k 轮换 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ 都是 $(k-1)$ 个对换的乘积

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) = (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3)\cdots(\alpha_1\alpha_k).$$

于是 (**) 表明 S_n 的每一个置换都可以写为对换 t_i 的乘积①

$$x = t_1 t_2 \cdots t_s.$$

x 的关于这种对换 t_i 的表示式不是唯一的, 但是, 对一个给定的元素乘因子个数的奇偶性是不变的②. 于是可定义映射

$$\mathrm{sgn} : x \mapsto (-1)^s$$

且它是从 S_n 到 2 阶乘法群 $\{1, -1\}$ ($\cong C_2$) 的同态. 这个同态的核是n 次交错群 A_n(alternating group A_n of degree n); 它由所有的偶(even) 置换组成 ($S_n \backslash A_n$ 中的置换称为奇(odd) 置换). 对 $n \geqslant 2$, A_n 是 S_n 的指数为 2 的正规子群. 一个 k 轮换是偶置换当且仅当 k 是奇数.

4.3.2 A_n 在 Ω 上是 $n-2$ 重传递的 ($n \geqslant 3$).

证明 $\Omega^{(n-2)}$ 中的有序组 $T_1 := (3, 4, \cdots, n)$ 可以被 S_n 中的置换 x 映射到 $\Omega^{(n-2)}$ 中任何另一个有序组 T_2. 于是 tx, $t = (12)$, 也把 T_1 映射到 T_2, 而且有 $x \in A_n$ 或者 $tx \in A_n$. □

4.3.3 A_n 是 S_n 的换位子群.

证明 设 K 是 S_n 的换位子群. 因为对 $n = 1$ 有 $S_n = A_n = 1 = K$, 所以可以假设 $n \geqslant 2$. 于是因 $S_n/A_n \cong C_2$ (见1.5.2) 得 $K \leqslant A_n$.

设 t 是 S_n 的一个对换, 则因为 S_n/K 为交换而有 $\langle t \rangle K$ 是 S_n 的正规子群. 由 4.3.1, S_n 的对换共轭, 且由前面知 S_n 的每一个元素都是对换的乘积. 因此 $S_n = \langle t \rangle K$, 从而 $K = A_n$. □

注意到当 $n = 2$ 时, $A_n = 1$, 当 $n = 3$ 时, $A_n = \langle (123) \rangle \cong C_3$, 且对后者,

$$1 \leqslant A_3 \leqslant S_3$$

是 S_3 的一个主列 (也是一个合成列), 其主因子为循环③ .

设 $n = 4$. S_4 中的 2 阶元素或者是对换或者是 (2, 2) 型的. 在第 2 种情形下的元素是

$$t_1 = (12)(34), \quad t_2 = (13)(24), \quad t_3 = (14)(23).$$

集合

$$N := \{1, t_1, t_2, t_3\}$$

① 1 记为空集积. 当然, 对 $n \geqslant 2$, 也有 $1 = t^2$, 这里 t 是一个对换.

② 这个性质常常在线性代数初学者的课上学习行列式时加以证明.

③ S_3 的群表在第 3 页.

是 A_4 的同构于 $C_2 \times C_2$ 的子群. 且 N 是 S_4 的正则正规子群. 设 $d = (123)$. 那么 A_4 是 $\langle d \rangle$ 与 N 的 (内) 半直积且

$$t_1^d = t_3, \quad t_2^d = t_1, \quad t_3^d = t_2.$$

因此

$$1 \leqslant N \leqslant A_4 \leqslant S_4$$

是 S_4 的主因子为交换的主列, 且

$$1 \leqslant \langle t_1 \rangle \leqslant N \leqslant A_4 \leqslant S_4$$

是 S_4 的合成因子为循环的合成列.

后面将用到下面的对 S_4 的结论:

4.3.4　设 G 是非 3 闭的 24 阶群. 那么有 $G \cong S_4$ 或者 $G/Z(G) \cong A_4$[①].

证明　G 由共轭作用在

$$\Omega := \mathrm{Syl}_3\, G$$

上. 因为 G 非 3 闭, 由 Sylow 定理得 $|\Omega| = 4$. 于是存在同态 $\varphi: G \to S_4$ 使得

$$\mathrm{Ker}\ \varphi = \bigcap_{S \in \Omega} N_G(S) =: N.$$

G/N 是 S_4 的一个子群且 $|N|$ 是 $24/4 = 6$ 的因子. 如果 $|N| \in \{3, 6\}$, 那么 N 是 3 闭的, 从而 G 是 3 闭的, 得到矛盾. 当 $N = 1$ 时得 $G \cong S_4$, 当 $|N| = 2$ 时得 $N = Z(G)$ 且 $G/N \cong A_4$. □

S_n 的固定 $n \in \Omega$ 的子群是作用在 $\{1, \cdots, n-1\}$ 上的对称群 S_{n-1}. 在此意义下, 把 S_{n-1} 和 A_{n-1} 都看成 S_n 的子群. 例如,S_4 是 S_3 和上面所提到的正则正规子群 N 的半直积.

4.3.5　定理　当 $n \geqslant 5$ 时 A_n 是单群.

证明　设 $n = 5$, 则 $|A_5| = 60$, 且因 A_5 中 5 轮换的个数大于 4 而有 A_5 非 5 闭. 因此, 由 54 页 3.2.12 得 A_5 是单群.

设 $n \geqslant 6$, N 是 A_n 的正规子群且 $1 \neq N \neq A_n$. 对 n 用归纳法, 可假设 A_{n-1} ($n \in \Omega$ 在 A_n 中的稳定子) 是单群, 且有 A_n 在 Ω 上是 4 重传递且本原的 (见 4.3.2 和 4.2.4). 于是由 4.2.1 和 4.2.2 得 A_{n-1} 是 A_n 的极大子群而 N 是 A_n 的传递正规子群. 再由 A_n 的 4 重传递性和 4.2.5 得 $n = 4$. 这和 $n \geqslant 6$ 矛盾. □

---

① 在此情形下 $G \cong A_4 \times C_2$ 或 $G \cong \mathrm{SL}_2(3)$, 见 8.6.10 小节.

4.4 非本原群和圈积

设群 G 传递而非本原地作用在集合 Ω 上. 那么存在非本原集 $\Delta \subseteq \Omega$ 使得 $1 \neq |\Delta| \neq |\Omega|$, 从而

$$\Sigma := \{\Delta^g | g \in G\}$$

是 Ω 的分划. 固定 $\alpha \in \Delta$, 令 $U := G_\alpha$, $H := G_\Delta$, 其中, G_Δ 是 Δ 的稳定子, 那么

$$U < H < G.$$

用 G 在 Σ 上和 H 在 Δ 上的作用来描述 G 在 Ω 上的作用. 由 4.1.1, G 在 Ω 上的作用等价于 G 由右乘在 U(在 G 中) 的右陪集上的作用. 因此, 假设

$$\Omega = \{Ug | g \in G\},$$

则

$$\Delta^g = \{Uhg \in \Omega | h \in H\}.$$

设 S 是 H 在 G 中的代表系. 对每一个 $x \in G$ 和 $s \in S$, 存在元素 $f_x(s) \in H$ 和 $s_x \in S$ 使

$$sx = f_x(s)s_x,$$

这些元素 $f_x(s)$ 由 x 和 s 唯一确定. 因此, 对 $Uhs \in \Delta^s$ 有

(1) $(Uhs)x = Uhf_x(s)s_x$.

对 $x, y \in G$ 和 $s \in S$, 有

$$f_{xy}(s)s_{xy} = s(xy) = f_x(s)s_xy = f_x(s)f_y(s_x)(s_x)_y.$$

由此得到

(2) $f_{xy}(s) = f_x(s)f_y(s_x)$

和

(3) $(s_x)_y = s_{xy}$.

因此

$$s \mapsto s_x, \quad s \in S, \ x \in G$$

定义了 G 在 S 上的作用, 且此作用等价于 G 在 Σ 上的作用.

设

$$\widehat{H} := \underset{S}{\times} H$$

是 $|S|$ 个 H 的直积. 把 $\widehat{H}$ 中的元素看成是从 S 到 H 中的函数

$$\widehat{H} = \{f | f : S \to H\},$$

其中, $f \in \widehat{H}$ 是第 s 个元素为 $f(s) \in H$ 的 S 有序组 (S–tuple). 乘法是由分量方式定义的, 即对 $f,\ g \in \widehat{H}$ 有 $(fg)(s) = f(s)g(s)$. 由前面定义的元素 $f_x(s) \in H$ 得到 $\widehat{H}$ 中的元素

$$f_x : s \mapsto f_x(s).$$

对 $x \in G$ 和 $f \in \widehat{H}$, 定义

(4) $f^x \in \widehat{H}$ 使得 $f^x(s) := f(s_{x^{-1}}),\ s \in S.$

因为

$$(f^x)^y(s) = f^x(s_{y^{-1}}) = f(s_{y^{-1}x^{-1}}) = f(s_{(xy)^{-1}}) = f^{xy}(s),$$

(4) 定义了 G 在群 $\widehat{H}$ 上的作用. 这个作用按照 G 在 S 上的作用置换 S 有序组中的元素: $f(s)$ 是 S 有序组 f^x 的第 s_x 个元素.

设 $G \ltimes \widehat{H}$ 是这个作用的半直积. 对 $(x, f) \in G \ltimes \widehat{H}$ 和 $Uhs \in \Omega$ ($h \in H,\ s \in S$), 令

(5) $(Uhs)^{(x,f)} := Uhf(s_x)s_x,$

则

$$(x, f)(y, g) = (xy, f^y g),\ (x, f),\ (y, g) \in G \ltimes \widehat{H}$$

且

$$\begin{aligned}((Uhs)^{(x,f)})^{(y,g)} &= (Uhf(s_x)s_x)^{(y,g)} \overset{(3)}{=} Uhf(s_x)g(s_{xy})s_{xy} \\ &\overset{(4)}{=} Uhf^y(s_{xy})g(s_{xy})s_{xy} = (Uhs)^{(xy, f^y g)}.\end{aligned}$$

于是 (5) 定义了 $G \ltimes \widehat{H}$ 在 Ω 上的作用. 记这个作用为 ρ', 而把 G 在 Ω 上的作用记为 ρ.

4.4.1 映射

$$\eta : G \to G \ltimes \widehat{H}, \text{其中}, x \mapsto (x, f_x{}^x)$$

是一个单同态且 $\rho = \eta\rho'$.

证明 显然 η 是单映射. 对 $x, y \in G$ 有

$$\begin{aligned}x^\eta y^\eta &= (x, f_x{}^x)(y, f_y{}^y) = (xy, f_x{}^{xy} f_y{}^y) = (xy, (f_x f_y{}^{x^{-1}})^{xy}) \\ &\overset{(2)(4)}{=\!=} (xy, f_{xy}{}^{xy}) = (xy)^\eta.\end{aligned}$$

因此 η 是一个单同态.

下证第 2 个结论. 设 $x \in G$ 和 $Uhs \in \Omega$ $(h \in H,\ s \in S)$, 则有

$$(Uhs)^{x^{\rho}} = Uhsx \overset{(1)}{=} Uhf_x(s)s_x \overset{(4)}{=} Uhf_x{}^x(s_x)s_x$$
$$\overset{(5)}{=\!=} (Uhs)^{(x,\,f_x{}^x)} = (Uhs)^{x^{\eta\rho'}}. \qquad \square$$

群 $G \ltimes \widehat{H}$ 是现在要定义的圈积的一个特殊情况.

首先引入一个四元组 (H, G, A, τ), 其中, H 和 G 是群, A 是 G 的子群, τ 是从 A 到 $\mathrm{Aut}\, H$ 的同态. 并用记号

$$H^a := h^{a^\tau}, \quad h \in H,\ a \in A.$$

设 S 是 A 在 G 中的代表系. 同上, 定义 $|S|$ 重直积

$$\widehat{H} := \underset{S}{\times} H = \{f | f : S \to H\}$$

及对每一个 $(x, s) \in G \times S$, (f_x, s_x) 是 $A \times S$ 中一个满足

$$sx = f_x(s)s_x$$

的元素.

同上, 用 A 代替 H, (2) 和 (3) 都成立. 特别地, $s \mapsto s_x$ 定义了 G 在 S 上的作用, 此作用等价于 G 在陪集 $Ag(g \in G)$ 上的作用. 对 $(x, f) \in G \times \widehat{H}$, 设 $f^x \in \widehat{H}$ 如下面的 (6) 所定义:

(6) $f^x(s) := f(s_{x^{-1}})^{f_x(s_{x^{-1}})}$, $s \in S$,

其中, $f_x(s_{x^{-1}})$ 关于 τ 作用在 H 上.

因为

$$(f^x)^y(s) = f^x(s_{y^{-1}})^{f_y(s_{y^{-1}})} = (f(s_{y^{-1}x^{-1}})^{f_x(s_{y^{-1}x^{-1}})})^{f_y(s_{y^{-1}})}$$
$$\overset{(2)}{=} f(s_{(xy)^{-1}})^{f_{xy}(s_{(xy)^{-1}})} = f^{xy}(s),$$

(6) 定义了 G 在群 $\widehat{H}$ 上的作用. 设

$$K_S := G \ltimes \widehat{H}$$

是关于这个作用的半直积.K_S 中的指数表明这个定义可能依赖于代表系 S 的选择. 但可以证明

4.4.2 设 S 和 $\widetilde{S}$ 是 A 在 G 中的两个代表系, 则 $K_S \cong K_{\widetilde{S}}$.

证明 对每一个 $s \in S$, 存在 $(b_s, \widetilde{s}) \in A \times \widetilde{S}$ 使

(7) $\widetilde{s} = b_s s$.

对 $(x, s) \in G \times S$, 设 $(\widetilde{f}_x, \widetilde{s}) \in \widehat{H} \times \widetilde{S}$ 使得

$$\widetilde{s}x = \widetilde{f}_x(\widetilde{s})\widetilde{s}_x.$$

因为

$$\widetilde{s}x = b_s sx = b_s f_x(s) s_x \overset{(7)}{=} b_s f_x(s) b_{s_x}^{-1} \widetilde{s}_x$$

得到

(*) $\widetilde{f}_x(\widetilde{s}) = b_s f_x(s) b_{s_x}^{-1}$.

显而易见, 由

(8) $f^\beta(\widetilde{s}) = f(s)^{b_s^{-1}}$

定义的映射

$$\beta : \underset{S}{\times} H \to \underset{\widetilde{S}}{\times} H$$

是一个同构. 设

$$\psi : K_S \to K_{\widetilde{S}} \text{ 使得 } (x, f) \mapsto (x, f^\beta).$$

那么 ψ 是一个同构当且仅当

(+) $(f^x)^\beta = (f^\beta)^x$, $\forall f \in \widehat{H}$, $x \in G$,

并且有

$$(f^x)^\beta(\widetilde{s}) \overset{(8)}{=} f^x(s)^{b_s^{-1}} \overset{(6)}{=} f(s_{x^{-1}})^{f_x(s_{x^{-1}}) b_s^{-1}}$$

以及

$$(f^\beta)^x(\widetilde{s}) = f^\beta(\widetilde{s}_{x^{-1}})^{\widetilde{f}_x(\widetilde{s}_{x^{-1}})} \overset{(8)}{=} f(s_{x^{-1}})^{b_{s_{x^{-1}}}^{-1} \widetilde{f}_x(\widetilde{s}_{x^{-1}})}.$$

于是由 (*) 得到 (+), 从而 $K_S \cong K_{\widetilde{S}}$. □

结论 4.4.2 证明了从四元组 (H, G, A, τ) 构造的半直积 $K := G \ltimes \widehat{H}$ (在同构意义下) 不依赖于代表系的选择. 群 K 称为 G 和 H(关于 $A \leqslant G$ 和 $\tau : A \to \mathrm{Aut}\, H$ 的**扭圈积**(twisted wreath product). 如果 $A^\tau = 1$, 那么, K 就是 G 和 H 的**圈积**(wreath product).

习 题

在下面的前 3 个题中, G 是在集合 Ω 上的传递置换群.

1. 设 N 是 G 的正规子群, Σ 是 N 在 Ω 上的轨道的集合. 那么 G 传递地作用在 Σ 上①.

2. (Witt, [101]) 设 G 在 Ω 上 n 重传递, $\Sigma \subseteq \Omega$, $|\Sigma| \geqslant n$, 再设 P 是 $\bigcap\limits_{\alpha \in \Sigma} G_\alpha$ 的 Sylow p 子群. 那么 $N_G(P)$ 在 $C_\Omega(P)$ 上 n 重传递.

① G 在 Ω 上的作用诱导出 G 在 Ω 的所有子集的集合上的一个作用.

3. 设 G 在 Ω 上本原且包含一个对换, 则 $G = S_\Omega$.

下面的 3 个题中, G 是一个 Frobenius 补为 H, Frobenius 核为 K 的 Frobenius 群.

4. 如果 H 为偶阶群, 那么 $Z(H) \neq 1$.

5. 假设 H 在 G 中的每一个陪集至少包含 K 中的一个元素, 那么 K 是 G 的子群.

6. 如果 H 是 G 的极大子群, 则 K 是一个初等交换 p 群①.

7. 设 p 为素数, $G := S_p$ 且 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. 试确定 $N_G(P)$.

8. 设 $x = (1\cdots n) \in S_m$, 则 $C_{S_m}(x) = R \times X$, 其中, $R = \langle x \rangle$, $X \cong S_{m-n}$ $(S_0 := 1)$.

9. 设 $H,\ K \leqslant S_8$, $H = \langle (123)(456)(78) \rangle$, $K = \langle (38) \rangle$. 分别定出 H, K 和 $\langle H,\ K \rangle$ 在 $\{1, \cdots, 8\}$ 上的轨道.

10. 写出 A_7 的类方程.

下面的 3 个题中, 设 $G := S_n$, $n \geqslant 3$, T 是 G 的对换的共轭类.

11. (a) $|T| = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 且对 $d \in T$, $C_G(d) \cong C_2 \times S_{n-2}$.

(b) $o(ab) \in \{1, 2, 3\}$, 对所有 $a,\ b \in T$.

12. 设 D 是 G 的一个满足

$$o(ab) \in \{1, 2, 3\}, \text{ 对所有 } a,\ b \in D$$

的对合的共轭类. 那么 $D = T$, 或者 $n = 6$ 且 $D = ((12)(34)(56))^G$, 或者 $n = 4$ 且 $D = ((12)(34))^G$.

13. 设 $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$ 使得 $T^\alpha = T$, 那么 α 是 G 的内自同构.

14. 设群 $\widetilde{G}$ 的对合 $d_1, \cdots, d_m$ $(m \geqslant 3)$ 满足下列条件:

(i) $\widetilde{G} = \langle d_1, \cdots, d_m \rangle$,

(ii) $o(d_i d_j) = \begin{cases} 2, & |i-j| \geqslant 2, \\ 3, & |i-j| = 1, \end{cases}$

(iii) $\langle d_i, \cdots, d_m \rangle \cong S_{m-i+2}$, $2 \leqslant i \leqslant m$,

那么对 $D := d_1^G$ 和 $M := \langle d_2, \cdots, d_m \rangle$ 有

(a) $|d_1^M| = m$, 且 M(由共轭)2 重传递作用在 d_1^M 上.

(b) 对所有 $a,\ b \in d_1^M$ 且 $a \neq b$ 有 $a^b \in M$.

(c) $D = d_1^M \cup (D \cap M)$.

(d) 设 $a \in d_1^M$ 且 $b \in D$, 则

$$Mab = \begin{cases} M, & a = b, \\ Ma^b, & b \in D \cap M, \\ Ma, & b \in d_1^M \setminus \{a\}. \end{cases}$$

(e) $|\widetilde{G} : M| = m + 1$ 且 d_1 如同对换那样作用在 $\{Mg | g \in \widetilde{G}\}$ 上.

15. 设群 $\widetilde{G}$ 有对合 $d_1, \cdots, d_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$ 满足下面的条件:

(i) $\widetilde{G} = \langle d_1, \cdots, d_{n-1} \rangle$ 且

---

① 在此题中假设 K 是 G 的正规子群 (见 4.1.6).

(ii) $o(d_i d_j) = \begin{cases} 2, & |i-j| \geqslant 2, \\ 3, & |i-j| = 1, \end{cases}$

则存在同构 $\varphi : \widetilde{G} \to S_n$ 使 d_1^{φ} 是 S_n 的对换.

16. 在 S_6 中存在两个和 S_5 同构但不共轭的子群.

17. $\mathrm{Aut}\ S_n = \mathrm{Inn}\ S_n$ 或 $n=6$ 且 $|\mathrm{Aut}\ S_n / \mathrm{Inn}\ S_n| = 2$.

第 5 章　p 群和幂零群

如 3.2 节的引言中所提到的那样, Sylow 定理引起对有限群的 p 子群的注意. 本章将给出 p 群 (及更一般的幂零群) 的一些基本事实, 这些将在后面的章节中用到.

5.2 节将研究包含一个循环极大子群的 p 群.

5.1 幂零群

群 G 称为**幂零** (nilpotent) 群, 如果 G 的每一个子群都在 G 中次正规[①]. 显然, 此性质等价于对 G 的每一个真子群 U 有 $U < N_G(U)$.

下面的结论是 12 页 1.2.8 和 Cauchy 定理的直接结果:

5.1.1　幂零群的子群和同态像都是幂零的. 幂零群的极大子群是素数指数的正规子群. □

5.1.2　设 G 是一个群, Z 是 $Z(G)$ 的子群. 那么 G 是幂零群当且仅当 G/Z 是幂零群.

证明　必要性成立可由 5.1.1 直接得到. 反之, 设 G/Z 是幂零群, $U \leqslant G$. 那么 $UZ/Z \lhd\lhd G/Z$, 于是 $UZ \lhd\lhd G$ (见 12 页 1.2.8). 因 $Z \leqslant Z(G)$ 而有 $U \trianglelefteq UZ$. 因此 $U \lhd\lhd G$ 得 G 是幂零群. □

48 页的结果 3.1.10 给出了最重要的幂零群类.

5.1.3　p 群是幂零的. □

已用 $O_p(G)$ 表示群 G 的极大正规子 p 群 (见 51 页 3.2.2), 且如果 $O_p(G)$ 是 G 的 Sylow p 子群, 那么 G 是 p 闭的.

5.1.4　定理　下面的结论是等价的:

(i) G 是幂零的.

(ii) 对每一个 $p \in \pi(G)$, G 是 p 闭的.

(iii) $G = \underset{p\in\pi(G)}{\times} O_p(G)$.

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii). 设 $U := N_G(G_p)$, 其中, $p \in \pi(G)$, $G_p \in \mathrm{Syl}_p G$. 那么, 因为 G_p 是 U 的一个 Sylow p 子群, 由 Frattini 论断得到

$$N_G(U) = UN_{N_G(U)}(G_p) = U.$$

---

① 这个定义只适用于有限群, 见 5.1.7 的脚注.

再由幂零性的定义得 $U = G$, 于是 $G_p \trianglelefteq G$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 由 24 页的 1.6.5 得到.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 由 49 页的 3.1.11 得, 对 $p \in \pi(G)$ 有 $Z(O_p(G)) \neq 1$. 因此也有

$$Z(G) = \underset{p\in\pi(G)}{\times} Z(O_p(G)) \neq 1$$

(见 23 页 1.6.2(a)). 设 $\overline{G} := G/Z(G)$, 则由 1.6.2(c) 得

$$\overline{G} = \underset{p\in\pi(\overline{G})}{\times} \overline{O_p(G)} = \underset{p\in\pi(\overline{G})}{\times} O_p(\overline{G}).$$

对 $|G|$ 用归纳法得到 $\overline{G}$ 是幂零的. 于是 G 是幂零的 (见5.1.2). □

由 1.6.2(a) 和第 49 页的 3.1.11 得到

5.1.5　设 G 是幂零群, $1 \neq N \trianglelefteq G$, 那么 $Z(G) \cap N \neq 1$. □

这个性质也刻画了幂零群.

5.1.6　下面的结论等价:

(i) G 是幂零群.

(ii) 对 G 的每一个真正规子群 N 有 $Z(G/N) \neq 1$.

(iii) 对 G 的每一个非平凡正规子群 N 有 $[N,G] < N$.

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii). 因为幂零群的商群是幂零群, 由 5.1.5 得出结论成立.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 设 $G \neq 1$, $\overline{G} := G/Z(G)$, 则 $Z(G) \neq 1$. G 的每一个商群也满足 (ii). 于是, 可对 $|G|$ 用归纳法且可假设 $\overline{N} = 1$ 或 $[\overline{N}, \overline{G}] < \overline{N}$. 对第 1 种情形得到 $N \leqslant Z(G)$, 从而 $[N,G] = 1 < N$. 而在第 2 种情形时, 由 19 页 1.5.1 得到 $[N,G] < N$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 设 $G \neq 1$ 且 M 是 G 的极小正规子群. 因为 $[M,G]$ 也是 G 的正规子群 (见 20 页 1.5.5), 得到 $[M,G] = 1$, 从而

$$M \leqslant Z(G).$$

又设 $\overline{G} := G/M$ 且 $M < N \trianglelefteq G$. 先假设 $[\overline{N}, \overline{G}] = \overline{N}$. 那么 $N = [N,G]M$ (见 19 页 1.5.1), 于是有

$$[N,G] = [[N,G],G].$$

因此由 (iii) 得 $[N,G] = 1$. 但此时得 $N = M$, 这和 N 的选择矛盾.

至此, 证明了 $\overline{G}$ 也满足 (iii). 于是, 对 $|G|$ 用归纳法, 可假设 $\overline{G}$ 是幂零的. 这样, 由 5.1.2 得 G 是幂零群. □

下面是幂零群的一个有用的性质:

5.1.7　设 G 是幂零群, N 是 G 的极大交换正规子群. 那么 $C_G(N) = N$.

证明 因为 $C_G(N) \geqslant N$, 假设 $C := C_G(N) > N$. 那么 C/N 是 G/N 的一个非平凡的正规子群. 由 5.1.1 和 5.1.5 得到

$$Z(G/N) \cap C/N \neq 1.$$

设 $N < U \leqslant G$ 使 U/N 是 $Z(G/N) \cap C/N$ 的循环子群. 那么 U 是一个正规子群且 U 是交换的 (见 13 页 1.3.1). 这和 N 的极大性矛盾. 因此 $C_G(N) = N$. □

根据 5.1.6 的 (ii) 和 (iii), 每一个幂零群都有一个子群列

$$1 = Z_0 \leqslant Z_1 \leqslant \cdots \leqslant Z_{i-1} \leqslant Z_i \leqslant \cdots \leqslant Z_{c-1} \leqslant Z_c = G,$$

其中, $Z_i \trianglelefteq G$ 且 $Z_i/Z_{i-1} \leqslant Z(G/Z_{i-1})$, $i = 1, \cdots, c$[①].

反之, 由 5.1.2 知道每一个具有这样的**中心列**(central series) 的群是幂零的[②].

G 的这样一个最短的中心列的长度 c 称为 G 的(**幂零**(nilpotent))**类**(class), 记作 $c(G)$. 例如, 如果 $G \neq 1$ 是交换的, 那么 $c(G) = 1$; 如果 $G/Z(G)$ 是交换的, 那么 $c(G) \leqslant 2$.

在本节的结尾, 证明两个将在后面用到的关于 (类为 2 的)p 群的结果.

5.1.8 设 A 和 B 是 p 群 G 的满足

$$[A, B] \leqslant A \cap B, \quad |[A, B]| \leqslant p$$

的子群, 则

$$|A : C_A(B)| = |B : C_B(A)|.$$

证明 由 20 页的 1.5.5 得到 $N := [A, B]$ 在 $\langle A, B\rangle$ 中正规. 因此,A/N 和 B/N 在 $\langle A, B\rangle/N$ 中互相中心化, 并且因为 $|N| \leqslant p$ 得到 $N \leqslant Z(\langle A, B\rangle)$(见 49 页 3.1.11). 由此得

$$C_B(A) = C_B(AN) \trianglelefteq B.$$

设

$$|B/C_B(A)| = p^n,$$

且 $b_1, \cdots, b_n \in B$ 满足

$$B = C_B(A)\langle b_1, \cdots, b_n\rangle.$$

A 由共轭作用在 Nb_i 上 $(i = 1, \cdots, n)$. 设 A_i 是这个作用的核. 于是

$$C_A(B) = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

---

① 用 5.1.6(ii) 得到由"下往上"列:$Z_1 := Z(G)$, $Z_2/Z_1 := Z(G/Z_1), \cdots$; 由 5.1.6(iii) 得到由"上往下"列:$G \leqslant [G, G] \leqslant [G, G] \leqslant [G, G, G] \leqslant \cdots$.

② 如果一个无限群具有这样一个中心列, 则定义该无限群是幂零的.

从 $|Nb_i| = |N| \leqslant p$ 得到 $|A/A_i| \leqslant p$, 于是同 24 页 1.6.4 一起得到

$$|A/C_A(B)| \leqslant p^n = |B/C_B(A)|.$$

互换 A 和 B, 用同样的论证也有

$$|B/C_B(A)| \leqslant |A/C_A(B)|.$$

因此等式成立. □

5.1.9　设 P 是一个 p 群, A 是 P 的极大交换子群. 假设 $|P'| = p$. 那么有

$$|P:A| = |A/Z(P)| \text{ 和 } |P/Z(P)| = |A/Z(P)|^2.$$

特别地, P 的所有极大交换子群的阶相同.

证明　由 A 的极大性得到

$$C_A(P) = Z(P),\ C_P(A) = A$$

且由 $|P'| = p$ 得 $P' \leqslant Z(P)$. 因此 $P' \leqslant A$. 于是应用 5.1.8 于 $B = P$, 得到

$$|A/Z(P)| = |P/A|$$

且有 $|P/Z(P)| = |P/A||A/Z(P)| = |A/Z(P)|^2$. □

习　题

1. 二面体群 D_{2n} 为幂零当且仅当 n 是 2 的幂.

下设 P 是 p 群.

2. 设 M_1, M_2 是 P 的两个不同的极大子群, 则 $P = M_1M_2$ 且 $P/M_1 \cap M_2 \cong C_p \times C_p$.
3. 如果 P 包含两个不同的交换极大子群, 那么 $P/Z(P)$ 是交换的.
4. 设 $U_1, \cdots, U_r$ 是 P 的真子群且使 $P = U_1 \cup \cdots \cup U_r$. 那么 $r \geqslant p+1$.
5. 设 A 是 P 的极大交换正规子群. 如果 $|A : C_A(x)| \leqslant p$, $\forall x \in P$, 那么 $P' \leqslant A$.
6. 设 $|P : C_P(x)| \leqslant p^2$, $\forall x \in P$, 则 P' 是交换的.

5.2　幂零正规子群

设 G 是群, N 是 G 的幂零正规子群. 那么由 5.1.4(iii) 得到

$$N = \underset{p \in \pi(N)}{\times} O_p(N).$$

因为 $O_p(N)$ 在 N 中特征, 所以它在 G 中正规. 因此

$$O_p(N) \leqslant O_p(G).$$

G 的所有幂零正规子群的积是 G 的特征子群; 称为 G 的**Fitting 子群**, 记作 $F(G)$[①].

由前得知, $F(G)$ 包含在子群 $O_p(G)$ $(p \in \pi(G))$ 的积中. 另一方面, 从 5.1.3 得每一个正规子群 $O_p(G)$ 都是幂零的, 于是每一个 $O_p(G)$ 包含在 $F(G)$ 中. 因此有

5.2.1 (a) $F(G)$ 是 G 的最大的幂零正规子群.

(b) $F(G) = \underset{p\in\pi(G)}{\times} O_p(G)$. □

下面的 Fitting 子群的重要性质可与 95 页的 6.1.4 和 6.5 节对照.

5.2.2 设 $C := C_G(F(G))$, 则

$$O_p(C/C \cap F(G)) = 1, \quad \forall p \in \mathbb{P}.$$

证明 设 P 是 $O_p(C/C\cap F(G))$ 在 C 中的逆像. 那么 P 在 G 中正规 (见 14 页 1.3.2) 且因 $C \cap F(G) \leqslant Z(C)$ 得 P 是幂零的 (见5.1.2). 因此 $P \leqslant F(G) \cap C$, 从而 $O_p(C/C \cap F(G)) = 1$. □

G 的所有极大子群的交是 G 的特征子群; 称为 G 的**Frattini 群**, 记作 **Φ(G)**[②]. 如果 $G = 1$, 则因 G 没有极大子群, $\Phi(G) = 1$. Frattini 子群最重要的性质是

5.2.3 设 H 是 G 的满足 $G = H\Phi(G)$ 的子群. 那么 $G = H$.

证明 如果 $G \neq H$, 那么 G 中存在包含 H 和 $\Phi(G)$ 的极大子群, 这矛盾于 $G = H\Phi(G)$. □

5.2.4 设 N 是 G 的正规子群, 那么 $\Phi(G)N/N \leqslant \Phi(G/N)$.

证明 因为 G/N 的极大子群恰好就是 G 的包含 N 的极大子群. □

应用 Frattini 论断得到

5.2.5 (a) $\Phi(G)$ 是幂零的.

(b) 如果 $G/\Phi(G)$ 是幂零的, 那么 G 是幂零群.

证明 (a) 由 5.1.4(ii), 只需证明 $\Phi(G)$ 的每一个 Sylow p 子群 P 在 $\Phi(G)$ 中正规即可. 由 Frattini 论断 3.2.7 知 $G = N_G(P)\Phi(G)$, 于是由 5.2.3 得 $G = N_G(P)$.

(b) 用类似于 (a) 的论证, 证明 G 的每一个 Sylow p 子群 P 在 G 中正规. 由 52 页的 3.2.5, $P\Phi(G)/\Phi(G)$ 是幂零群 $G/\Phi(G)$ 的 Sylow p 子群. 于是在 $G/\Phi(G)$ 中正规 (见 5.1.4(ii)). 因此 $N := P\Phi(G)$ 在 G 中正规. 而由 $P \in \mathrm{Syl}_p G$, 有

$$G \overset{3.2.7}{=\!=} N_G(P)N = N_G(P)P\Phi(G) = N_G(P)\Phi(G),$$

得 $G = N_G(P)$. □

本节最后的一些结论都是关于 p 群的 Frattini 子群的. 首先是一个由 2.1.2 直接得出的结果:

---

① 见文献 [44].
② 见文献 [45].

5.2.6　设 P 是一个初等交换群, 那么 $\Phi(P)=1$.

5.2.7　设 P 是一个 p 群.

(a) $P/\Phi(P)$ 是初等交换群.

(b) 如果 $|P/\Phi(P)|=p^n$, 那么存在 $x_1,\cdots,x_n\in P$ 使 $P=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$.

证明　(a) 幂零群的每一个极大子群都是指数为 p 的正规子群. 因此由 24 页的 1.6.4 得到 (a).

(b) 由 (a) 和 2.1.8(a) 得 $P/\Phi(P)(|P/\Phi(P)|=p^n)$ 由 n 个元素 $x_1\Phi(P),\cdots,x_n\Phi(P)$, $x_i\in P$ 生成. 因此由 5.2.3 得到 $P=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle\Phi(P)=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$.　□

5.2.8　设 P 是一个 p 群, 则 $\Phi(P)$ 是 P 的使其商群为初等交换群的最小的正规子群.

证明　设 $N\trianglelefteq P$, 使 P/N 是初等交换群. 由 5.2.4 得 $\Phi(P)N/N\leqslant\Phi(P/N)$, 于是由 5.2.6 得到 $\Phi(P)\leqslant N$. 再由 5.2.7(a) 即得结论成立.　□

如果 P 是一个非交换的 p 群, 且满足

$$P'=\Phi(P)=Z(P)=\Omega(Z(P)),$$

则称 P 为**特殊**(special)**群**. 进一步, 如果 $Z(P)$ 是循环的, 那么 P 称为**超特殊群**(extraspecial).

从 5.1.9 得到

5.2.9　设 P 是超特殊群, A 是阶为 p^n 的极大交换子群. 那么 $|P|=p^{2n-1}$.□

应该指出的是, 一个超特殊群是阶为 p^3 的非交换群的中心积①.

习　　题

下设 G 是一个群.

1. $F((G)/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G)$.
2. 如果 $F(G)$ 是一个 p 群, 那么 $F(G/F(G))$ 是一个 p' 群.
3. 假设 G 是幂零的, 则下述命题等价:

(i) G 是循环的.

(ii) G/G' 是循环的.

(iii) G 的每一个 Sylow p 子群是循环的.

4. G 是幂零群当且仅当 G 的每一个极大子群是正规子群.
5. G 是幂零群当且仅当对 G 的每一个非循环子群 U 有

$$\langle x^U\rangle\neq U,\quad\forall x\in U.$$

6. $N\trianglelefteq G\Rightarrow\Phi(N)\leqslant\Phi(G)$.

---

① 见 93 页习题 4.

7. 设 $p \in \pi(G)$ 使 $O_p(G) = 1$, 而 N 是 G 的一个正规子群且使 G/N 是 p 群. 那么 $\Phi(G) = \Phi(N)$.

8. 设 N 是 G 的使 G/N 为幂零的正规子群. 那么 G 中存在幂零子群 U 使 $G = NU$.

9. 设 P 是 p 群. 如果 $p = 2$, 那么

$$\Phi(P) = \langle x^p | x \in P \rangle.$$

对 $p \neq 2$ 情形, 给出一个反例.

5.3 具有循环极大子群的 p 群

本节, 确定所有包含循环极大子群的 p 群.

设 P 是 p 群, H 是 P 的极大子群. 由 3.1.10, H 在 P 中正规且 $P/H \cong C_p$. 首先考虑 P 是交换群的情形:

5.3.1 设 P 是交换群, H 是 P 的循环极大子群. 那么或者 P 是循环的, 或者 $P = H \times C$, 其中, $C \cong C_p$.

证明 假设 P 非循环. H 是 P 中的极大阶的循环子群. 因此由 34 页的 2.1.1 得到 $P = H \times C$, 其中, $C \cong C_p$. □

下面分两种情形来研讨 P 为非交换情形:

- H 在 P 中有补 A.
- H 在 P 中没有补.

在第 1 种情形, P 是 H 和 A 的半直积且知道 $A \cong C_p$. 如果进一步假设 H 也循环, 那么 P 中的乘法完全由 A 在 H 上的作用决定. 于是有

5.3.2 设 P 是一个非交换 p 群, $H = \langle h \rangle$ 是 P 的循环极大子群且 $|H| = p^n$. 假设 H 在 P 中有补 $A = \langle a \rangle$. 那么下面情形之一成立:

(a) $p \neq 2$ 且 $h^a = h^{1+p^{n-1}}$(选择适当的 $a \in A$).

(b) $p = 2$ 且 $h^a = h^{-1}$.

(c) $p = 2$, $n \geqslant 3$ 且 $h^a = h^{-1+2^{n-1}}$.

(d) $p = 2$, $n \geqslant 3$ 且 $h^a = h^{1+2^{n-1}}$.

上面所述的 4 种情形刻画了 P 的 4 种不同的同构类.

证明 (a) ~ (d) 可从 41 页 2.2.6 得到. 下面只要证明它们是不同构的 4 个类型. 实际上只要考虑 (b),(c),(d)3 种情形. 在这些情况中, 对合

$$z := h^{2^{n-1}}$$

在 $Z(P)$ 中, 且对 $i \in \mathbb{N}$ 有

$$(h^i)^a = \begin{cases} h^{-i}z^i, & \text{情形(c)}, \\ h^i z^i, & \text{情形(d)}. \end{cases}$$

由此得到

$$Z(P)=\begin{cases}\langle z\rangle, & \text{情形(b)},\\ \langle z\rangle, & \text{情形(c)}\\ \langle h^2\rangle, & \text{情形(d)}.\end{cases}$$

因此, 只要考察情形 (b) 和 (c) 就够了. 在情形 (b) 时 $P\backslash H$ 中的每一个元素都是对合, 而在情形 (c) 时, $ha\in P\backslash H$ 是 4 阶元. □

在情形 (b) 时, P 是一个二面体群 (见 27 页 1.6.9). 而在情形 (c) 时, P 称为**半二面体群**(semidihedral group).

现在回到非半直积情形并且介绍要在这里出现的四元数群.

设 $3\leqslant n\in\mathbb{N}$,

$$H=\langle h_1\rangle\cong C_{2^{n-1}},\quad A=\langle a_1\rangle\cong C_4.$$

那么 A 通过

$$h_1^{a_1}=h_1^{-1}$$

作用在 H 上. 特别地, $\langle a_1^2\rangle$ 平凡地作用在 H 上. 设 P 是关于这个作用的半直积 AH. 那么

$$\langle a_1^2\rangle\langle h_1^{2^{n-2}}\rangle\ (\cong C_2\times C_2)$$

是 $Z(P)$ 的子群. 设

$$N:=\langle a_1^2h_1^{2^{n-2}}\rangle.$$

群 P/N(和每一个同构于 P/N 的群) 称为 2^n 阶**四元数群**(quaternion group), 记为 Q_{2^n}①. 设

$$a=a_1N,\quad h=h_1N.$$

那么

$$Q_{2^n}=\langle a,h\rangle$$

且

$$o(h)=2^{n-1},\quad o(a)=4,\quad h^a=h^{-1},\quad h^{2^{n-2}}=a^2.$$

这些关系决定了 Q_{2^n} 的乘法表, 即所有同阶的四元数群同构.

按下面的方法 8 阶四元数群可看成复数域 $\mathbb{C}$ 上所有可逆的 2×2 矩阵组成的群 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ 的子群: 设

$$\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

① 当 $n>2$ 时, Q_{2^n} 也称为**广义**(generalized)**四元数群**.

那么 $h^2 = a^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 于是 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ 中的子群 $\langle h, a\rangle$ 是四元数群.

四元数群 $Q := Q_{2^n}$ 的基本性质如下:

- $\langle h\rangle$ 是 Q 中指数为 2 的正规子群.
- 对每一个 $x \in Q\backslash\langle h\rangle$ 有 $x^2 = h^{2^{n-2}}$.
- $Z(Q) = \langle h^{2^{n-2}}\rangle$.
- $Z(Q)$ 是 Q 中唯一的 2 阶子群.
- Q 的子群不是四元数群就是循环群.
- 如果 Q 的阶为 8, 那么它的每一个子群都是正规的.

下面证明

5.3.3 $\mathrm{Aut}\, Q_8 \cong S_4$.

证明 $A :=\mathrm{Aut}\, Q_8$ 作用在 Q_8 的极大子群的集合 Ω 上且 $|\Omega| = 3$. 因此存在同态

$$\varphi : A \to S_3.$$

设 x, y 是 Q_8 中使得 $y \notin \langle x\rangle$ 的 4 阶元. 那么

$$\Omega = \{\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle xy\rangle\}$$

且

$$x^y = x^{-1}, \quad y^x = y^{-1}, \quad x^2 = y^2.$$

这些关系表明 A 包含一个与 x 和 y 可交换的元素. 于是 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 包含 S_3 的所有对换, 即

$$\mathrm{Im}\,\varphi = S_3,$$

有

$$N := \mathrm{Inn}\, Q_8 \cong Q_8/Z(Q_8) \cong C_2 \times C_2$$

且 $N \leqslant \mathrm{Ker}\,\varphi$. 首先证明

(′) $N = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

设 $a \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. 因为 $x^y = x^{-1}$ 可以假设 $x^a = x$. 如果 $y^a = y$ 那么 $a = 1$, 如果 $y^a = y^{-1}$ 那么 a 是由 x 诱导的内自同构. 这证得 (′).

于是 $A/N \cong S_3$, 从而有 $|A| = 24$. $\mathrm{Im}\,\varphi$ 的 3 阶子群在 Ω 上是传递的, 从而在 $N^{\#}$ 上也传递. 由此得到 $Z(A) = 1$, A 不是 3 闭的. 因此由 72 页 4.3.4 得到结论.□

为了证明在非半直积情形只有四元数群, 需要以下引理:

5.3.4　设 x, y 是 p 群 P 的元素且

$$[x,y]\in\Omega(Z(P)).$$

(a) 如果 $p\neq 2$, 则 $(xy)^p=x^py^p$.

(b) 如果 $p=2$, 则 $(xy)^2=x^2y^2[x,y]$ 且 $(xy)^4=x^4y^4$.

证明　设 $z:=[x,y]$. 那么 $x^y=xz$ 且 $x^{y^i}=xz^i$, $i\geqslant 1$. 由假设得到 $z^p=1$, 于是

$$(x^p)^y=(x^y)^p=x^pz^p=x^p.$$

假设 $p=2$. 那么

$$(xy)^2=xyxy=xy^2x[x,y]=x^2y^2z$$

且 $(xy)^4=x^2y^2zx^2y^2z=x^4y^4$.

假设 $p\neq 2$, 那么

$$\begin{aligned}(xy^{-1})^p&=(xy^{-1})(xyy^{-2})(xy^2y^{-3})\cdots(xy^{p-1}y^{-p})\\&=x\,xz\,xz^2\cdots xz^{p-1}y^{-p}\\&=(x^py^{-p})(z\,z^2\cdots z^{p-1}).\end{aligned}$$

因为

$$zz^p\cdots z^{p-1}=z^{\frac{p(p-1)}{2}}=1,$$

所以 (a) 成立.　□

有下面的推论:

5.3.5　设 P 是 p 群且 $p\neq 2$. 假设 $P/Z(P)$ 是交换群①. 那么有

$$\Omega(P)=\{x\in P\mid x^p=1\}.$$

证明　设 x, $y\in P$ 使 $x^p=y^p=1$. 因为 $P/Z(P)$ 是交换群, 所以元素 $z:=[x,y]$ 包含在 $Z(P)$ 中. 因此

$$1=(x^p)^y=(x^y)^p=x^pz^p=z^p,$$

于是因 $x^y=xz$ 得 $z\in\Omega(Z(P))$. 这样由 5.3.4(a) 即得到结论.　□

设 P 是一个有循环极大子群 H 的 p 群且 H 在 P 中没有补. 那么 $1\neq x^p\in H$, $\forall x\in P\backslash H$, 从而 $\Omega(H)$ 是 P 中唯一的 p 阶子群.

---

① 就是说 $c(P)\leqslant 2$.

5.3.6 设 P 是有一个循环极大子群 H 的非交换 p 群. 假设

(∗) $1 \neq x^p \in H,\ \forall x \in P\backslash H,$

则 P 是一个四元数群. 特别地, $p=2$.

证明 设 $H=\langle h\rangle$, $o(h)=p^n$ 且 $z:=h^{p^{n-1}}$, 则

$$\Omega(Z(P))=\langle z\rangle.$$

取 $x\in P\backslash H$ 使 $o(x)$ 为极小. 因为 P 非循环, 有 $\langle x^p\rangle\leqslant\langle h^p\rangle$. 设 $h_0\in H$ 使

$$x^p={h_0}^p.$$

当 $p\neq 2$ 时可如下推出矛盾: 用 x 的一个合适的方幂取代 x, 则从 41 页 2.2.6(a) 得到

$${h_0}^x={h_0}^{1+p^{n-1}},$$

于是有 $[h_0^{-1},x]\in\Omega(Z(P))$. 而由 5.3.4 可得 $(h_0^{-1}x)^p=h_0^{-p}x^p=1$, 这和 $h_0^{-1}x\in P\backslash H$ 矛盾.

设 $p=2$. 根据 2.2.6 讨论下面的情形:

(b) $h^x=h^{-1}$, 即 $[h,x]=h^{-2}$.

(c) $n\geqslant 3$, $h^x=h^{-1}z$, 即 $[h,x]=h^{-2}z$.

(d) $n\geqslant 3$, $h^x=hz$, 即 $[h,x]=z$.

在情形 (d) 时, 将导出矛盾. 在这种情况下对 h 的每一个幂 y 有

$$[y,x]\in\langle z\rangle.$$

对 $y:=h_0^{-1}$, 由 5.3.4(b) 得到

$$(h_0^{-1}x)^2=h_0^{-2}x^2z=z,$$

于是 $o(h_0^{-1}x)=4$. 由 $o(x)$ 的极小性选择得 $o(x)=4$, 从而 $x^2=z$. 由此得到 ${h_0}^4=1$. 另一方面有 $(h^2)^x=h^2z^2=h^2$, $C_H(x)=\langle h^2\rangle$. 如果 $h_0\in C_H(x)$, 那么 $o(h_0^{-1}x)=2$, 这和 $h_0^{-1}x\in P\backslash H$ 矛盾. 因此 $h_0\in H\backslash\langle h^2\rangle$ 且

$$H=\langle h_0\rangle\cong C_4,$$

矛盾于 $n\geqslant 3$.

而在情形 (b) 和 (c) 时, 有

$$x^2=(x^2)^x=(h_0^2)^x=h_0^{-2}=x^{-2},$$

于是也有 $o(x)=4$, 即

$$x^2=z.$$

由情形 (c) 得到

$$(hx)^2=hxhx=hx^{-1}hxx^2=z^2=1,$$

这和 $hx\in P\backslash H$ 矛盾.

因此只能有情形 (b), 这时由 $x^2=z$ 证得 P 是 2^{n+1} 阶的四元数群. □

5.3.7　定理　设 P 是一个包含唯一的 p 阶子群的 p 群. 那么或者 P 是循环的, 或者 $p=2$ 且 P 是四元数群.

证明　由 36 页 2.1.7, 可假设 P 是非交换群, 并且因为 P 的每一个满足 $1\neq U\neq P$ 的子群 U 也包含唯一的 p 阶子群, 所以可对 $|P|$ 用归纳法且可假设或者 U 是循环的, 或者 $p=2$ 且 U 是四元数群. 设 H 是 P 的极大交换正规子群. 那么 H 是循环的且

$$C_P(H)=H$$

(见5.1.7). 因此, 可把 $A:=P/H$ 看成 $\mathrm{Aut}\,H$ 的某个子群 (见 48 页 3.1.9). 设 $Q/H\,(H\leqslant Q\leqslant P)$ 是 A 中的 p 阶子群. 那么 Q 是非交换群, 且因 H 包含 P 中仅有的 p 阶子群得

$$1\neq x^p\in H,\ \forall x\in Q\backslash H.$$

于是$p=2$ 且 Q 是四元数群 (见5.3.6). 特别地, 对所有 $a\in Q\backslash H$ 有

$$h^a=h^{-1}.$$

因此 2 群 A 仅包含一个 2 阶子群. 由 2.2.6(c) 得 $h^{a^2}\neq h^{-1}$, $\forall a\in\mathrm{Aut}\,H$. 由此得到 $|A|=2,\ Q=P$. □

作为 5.3.7 的推论有

5.3.8　假设 P 是所有交换子群均循环的 p 群. 那么 P 是循环群或者是四元数群.

证明　设 $U\leqslant P$ 使 $|U|=p$. 因为 $Z(P)U$ 是交换的, 所以由假设得到 $Z(P)U$ 是循环的, 从而 U 是 $Z(P)U$ 的唯一的 p 阶子群, 于是因 $Z(P)\neq 1$ 得到 $U\leqslant Z(P)$. 因此 U 也是 P 中唯一的 p 阶子群, 结论由 5.3.7 推得. □

下面, 将描述 p^3 阶的非交换 p 群①.

假设 P 包含一个 p^2 阶的元素 h, 那么 $H:=\langle h\rangle$ 是 P 的循环极大子群. 这种情形在 5.3.2 和 5.3.6 中进行了研究:

如果 $p\neq 2$, 那么存在 $a\in P\backslash H$ 使 $o(a)=p$ 且 $h^a=h^{1+p}$.

---

① 这些群以及其他的小阶群首次为 Hölder 所确定.

如果 $p=2$, 那么 P 是一个二面体群或 8 阶四元数群.

假设 P 没有 p^2 阶元素; 即

(′) $x^p=1,\ \forall x\in P$.

那么 P 不同构于刚刚讨论过的任一个群. 因为此时若 $p=2$, 则 P 是交换的 (8 页习题 8), 所以也有

(″) $p\neq 2$.

现在证明 P 由 (′) 和 (″)(在同构意义下) 唯一确定.

设 H 是 P 中的 p^2 阶子群, $a\in P\backslash H$. 那么 $P=\langle a\rangle H$ 是同构于如下群的半直积 (见 5.3.1):

(1) $H\cong C_p\times C_p$, 而 $\langle a\rangle\cong C_p$.

由 49 页 3.1.11, 存在 $1\neq z\in H$ 使得 $z^a=z$. 因为 P 是非交换群, 故对于 $h\in H\backslash\langle z\rangle$ 有 $h^a\neq h$ 且因为 $P/\langle z\rangle$ 是交换的, 而有 $[h,a]\in\langle z\rangle$ (见5.3.1). 用 z 的一个适当的方幂替代 z 后, 看到

(2) $H=\langle z\rangle\times\langle h\rangle,\ z^a=z,\ h^a=zh$

给出了 a 在 H 上的作用. 因此 (1) 和 (2) 决定了 P 的同构类型.

应该指出的是, 8 阶二面体群也是一个满足 (1) 和 (2) 的半直积 $\langle a\rangle H$.

以两个在第 12 章中所需要的结果来结束本节.

5.3.9 设 P 是一个 p 群, 它的所有交换正规子群都循环的. 那么 P 是循环群, 或者 $p=2$ 且 P 是一个四元数群或阶大于 8 的二面体群, 或者 P 是一个半二面体群.

证明 同 5.3.7 的证明, 设 H 是 P 的一个极大交换正规子群. 那么 $C_P(H)=H$ 且由假设得 H 循环. 可以假设 $H\neq P$. 那么

(1) $H\neq\Omega(H)=\Omega(Z(P))\cap H$

且 P/H 是交换群. 因此, 每一个包含 H 的子群都是 P 的正规子群. 设 X 是 H 的极大子群. 证明

(′) 设 $a\in P\backslash H$ 使 $a^p\in H$, 则 $x^a=x^{-1},\ \forall x\in X$; 特别地, $p=2$.

假设 (′) 不成立. 那么有

(2) 若 $p=2$ 则 $|H|\geqslant 2^3$

且 $H\langle a\rangle$ 不是四元数群. 于是可选 a 使 $o(a)=p$. 因为 a 在 H 上诱导非平凡的自同构, 41 页的结果 2.2.6 或 5.3.1 证明了

$$[H,a]=\Omega(H)\ \text{和}\ [X,a]=1.$$

假设 $h\in H\backslash X$ 且 $o(ha)=p$. 那么有

$$o(h)=o(a^{-1}(ah))\overset{5.3.4}{=\!=\!=}\begin{cases}p, & p\neq 2,\\ \leqslant 4, & p=2,\end{cases}$$

这分别和 (1), (2) 矛盾. 因此 $\Omega(H\langle a\rangle)$ 包含在非循环交换群 $X\langle a\rangle$ 中. 因此

$$C_p \times C_p \cong \Omega(H\langle a\rangle) \text{ char } H\langle a\rangle \trianglelefteq P,$$

这和假设矛盾. 于是 (′) 得证.

在 2.2.6(b) 中, 曾对 $\mathrm{Aut}\,H$ 加以描述. 从 2.2.6(b) 和 (′) 得到 $|P/H| = 2$. 于是由 5.3.2 得到论断; 注意到若 $P \cong D_8$, P 中存在非循环的交换正规子群. □

5.3.10 设 P 是一个 2 群, t 是满足

$$C_P(t) \cong C_2 \times C_2$$

的 P 的对合. 那么 P 是二面体群或半二面体群①.

证明 设 H 是 P 的极大交换正规子群. 由 5.1.7 得

(1) $|P/H| \leqslant |\mathrm{Aut}\,H|$.

由 5.3.9 可假设 H 非循环. 那么 H 包含同构于 $C_2 \times C_2$ (见2.1.7) 的子群.

首先假设 $t \in H$. 那么 $H \leqslant C_P(t)$, 于是 $H \cong C_2 \times C_2$, 从而由 (1) 得到 $|P/H| \leqslant 2$. 当 $P = H$ 时得 $P = D_4$, 而当 $|P| = 8$ 时有 $P = D_8$②.

现在假设 $t \notin H$. 那么

(2) $C_2 \cong C_H(t) =: Z$.

因为 H 是交换的, 所以集合

$$K := \{[x,t] | x \in H\}$$

是 H 的子群. 对 $x, y \in H$ 有

$$[x,t] = [y,t] \Leftrightarrow xZ = yZ.$$

因此

$$|H : K| = 2.$$

又

$$[x,t]^t = (x^{-1}txt)^t = tx^{-1}tx = [x,t]^{-1},$$

于是有

(3) $k^t = k^{-1}$, $\forall k \in K$.

特别地, K 的对合包含在 $C_H(t)$ 中. 因此, 由 (2) 得 Z 是 K 中唯一的 2 阶子群, 从而 K 循环 (见2.1.7). 因为 H 非循环, 所以存在对合 $y \in H \backslash K$. 又由于 $[y,t]$ 也是对合, 于是

---

① 反之, 二面体群和半二面体群都有此性质.

② 因为, 否则有 $P = Q_8$, 但 Q_8 仅包含一个对合.

$$y^t = yz,\ 其中,\ \langle z\rangle := Z.$$

当 $|H| = 4$ 时, 由 (1) 得 $P = \langle y, t\rangle \cong D_8$.

当 $|H| > 4$ 时, 有 $|K| \geqslant 4$, 从而存在 $k \in K$ 使 $o(k) = 4$. 由此得到 $k^2 = z$, 于是

$$k^t \overset{(3)}{=} k^{-1} = kz,$$

由此得到

$$(yk)^t = y^t k^t = yzkz = yk,$$

因 $o(yk) = 4$, 这和 (2) 矛盾. □

习　题

1. 对所有 p^3 阶 p 群 P 确定其 $\Omega(P)$.

2. 设 A, B 是两个 p^3 阶的非交换群, $Z(A) = \langle a\rangle$, $Z(B) = \langle b\rangle$ 以及 $P := (A \times B)/\langle ab\rangle$. 那么 P 是一个超特殊 p 群.

3. 设 P 是一个 p^3 阶的超特殊 p 群, 则

$$\operatorname{Inn} P = \{\alpha \in \operatorname{Aut} P | (xZ(P))^\alpha = xZ(P),\ \forall x \in P\}.$$

4. 每一个超特殊 p 群是 p^3 阶的超特殊群的中心积.

5. 设 P 是 p 群, $Z_2(P')$ 是 $Z(P'/Z(P'))$ 在 P' 中的逆像. 那么 P' 循环当且仅当 $Z_2(P')$ 循环.

6. 在 $\mathbb{F}_3$ 上所有的可逆矩阵组成的群 $\mathrm{GL}_2(3)$ 中, 设

$$\boldsymbol{P} := \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

那么 $P \cong Q_8$ 且 $P \trianglelefteq GL_2(3)$.

7. $\operatorname{Aut} Q_{2^n}$ 是一个 2 群当且仅当 $n \geqslant 4$.

第6章　正规和次正规结构

6.1　可　解　群

群 G 称为**可解的**(solvable)[①], 如果

$$\text{对所有满足 } 1 \neq U \leqslant G \text{ 的子群 } U \text{ 有 } U' \neq U.$$

交换群和幂零群都是可解群的群例 (见 79 页 5.1.1). 于是 p 群是可解群.

设 G 是一个二面体群. 那么群 G 有一个指数是 2 的循环正规子群 N(见 27 页 1.6.9). 因此, 对 G 的每一个子群 U 都有 $U' \leqslant N$, 且如果 $U \leqslant N$ 有 $U' = 1$. 这证明了二面体群是可解的.

可解群的群例还有对称群 S_3 和 S_4. 对于 S_3, 因为 S_3 是二面体群, 由上面可得 S_3 是可解的. 而对于 S_4, 运用在 4.3 节中给出的主列, 用类似于对二面体群的论证即可得出结论.

包含非交换单子群 E 的群非可解, 这是因为 $E' = E$. 特别地, 当 $n \geqslant 5$ 时 S_n 非可解 (见 72 页 4.3.5).

由经典的 Burnside 定理知每一个 $p^a q^b$ $(q, p \in \mathbb{P})$ 阶的群都是可解群; 将在 10.2 节中证明这个定理.

群论中一个非常著名的定理是 Feit-Thompson[43] 定理, 它证明了每一个奇阶群都是可解群[②].

6.1.1　可解群的子群和同态像也是可解的.

证明　由可解性的定义得到每一个子群都是可解的. 设 φ 是可解群 G 的一个同态映射, $1 \neq V \leqslant G^\varphi$, U 是满足 $U^\varphi = V$ 的 G 的极小阶的子群. 由 19 页 1.5.1 得

$$(U')^\varphi = V'.$$

因为 $U' < U$, 由 U 的极小性得到 $V' < V$. □

6.1.2　群 G 是可解的当且仅当存在正规子群 N 使 G/N 和 N 都是可解的.

证明　必要性由 6.1.1 得到. 现在证充分性.

设 N 是使 G/N 和 N 都可解的正规子群且 $1 \neq U \leqslant G$. 如果 $U \leqslant N$, 那么由 N 的可解性得 $U' < U$. 如果 $U \not\leqslant N$, 那么 $V := UN/N$ 是可解群 G/N 的非平凡子

---

① 无限群可解的定义不同于此处的定义, 见 6.1 节后习题脚注.

② 在文献 [3] 中也能见到.

群, 于是有

$$U'N/N \overset{1.5.1}{=} V' < V = UN/N.$$

因此此时也有 $U' < U$. □

6.1.3 可解群 G 的每一个极小正规子群 N 都是初等交换 p 群.

证明 因为 1 和 N 是 N 仅有的特征子群 (见 14 页 1.3.2), 所以有 $N' = 1$, $|\pi(N)| = 1$ (见 36 页 2.1.6) 且 $\Omega(N) = N$. □

结论 6.1.3 证明了对非平凡可解群都存在 $p \in \pi(G)$ 使 $O_p(G) \neq 1$, 且因为

$$G_1 := C_G(F(G))/C_G(F(G)) \cap F(G)$$

是可解的 (6.1.1), 由 5.2.2 得到 $G_1 = 1$. 于是 (也平行于 6.5.8) 有

6.1.4 设 G 是一个可解群. 那么 $C_G(F(G)) \leqslant F(G)$. □

群 G 的子群列

$$G^1 := G' \geqslant G^2 := (G^1)' \geqslant \cdots \geqslant G^i := (G^{i-1})' \geqslant \cdots$$

称为 G 的**换位子列**. 注意到此列中所有的子群都是 G 的特征子群.

6.1.5 定理 关于群 G, 下面的结论是等价的:

(i) G 是可解的.

(ii) 存在 $l \in \mathrm{N}$ 使 $G^l = 1$①.

(iii) G 有一个所有因子都是交换群的正规列.

(iv) G 有一个所有因子的阶都是素数的合成列.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 由可解性定义直接可得到. (ii) $\Rightarrow$ (iii). 是平凡的. 假设 (iii) 成立. 那么可以把这个列扩充成 G 的一个所有因子的阶都是素数的合成列②(见 1.8 节).

(iv) $\Rightarrow$ (i). 设 $(A_i)_{i=0,\cdots,a}$ 是 (iv) 中给出的合成列. 那么 $N := A_{a-1}$ 是使商群 G/N 循环的 G 的正规子群. 因为 $(A_i)_{i=0,\cdots,a-1}$ 是 N 的合成列, 对 $|G|$ 用归纳法, 可设 N 是可解的. 于是由 6.1.2 得到 (i). □

同 5.1 节中考虑任意有限群的幂零正规子群那样, 现在研究可解正规子群.

6.1.6 设 A, B 是 G 的两个可解的正规子群. 那么积 AB 也是 G 的可解正规子群.

证明 因为 $AB/A \cong B/A \cap B$*, 从 6.1.1 和 6.1.2 得到结论. □

结论 6.1.6 证明了积

---

① 如果无限群 G 满足这个性质, 则定义 G 为可解的.

② 顺便提一下, 也可以扩充为一个所有因子都是初等交换群的主列, 见 6.1.3.

* 原书此处有误. —— 译者注

$$S(G) := \prod_{\substack{A \trianglelefteq G \\ A\text{可解}}} A$$

是 G 的 (特征) 可解子群. 因此 $S(G)$ 是 G 的**最大的可解正规子群**. 特别地, 可解群的直积是可解的.

习　　题

设 G 是一个群.

1. 设 G 是可解群. 那么 G 中存在正规极大子群.

2. 确定 S_4 的换位子列.

3. 如果下面之一成立, 则 G 是可解群:

(a) $|G| = p^n q$ $(p, q \in \mathbb{P})$.

(b) $|G| = pqr$ $(p, q, r \in \mathbb{P})$.

4. 确定所有阶 $\leqslant 100$ 的非可解群.

5. 设 G 是可解群. 假设 G 的所有 Sylow 子群都是循环的, 那么 G' 是交换群.

6. 设 G 是可解的且 $\Phi(G) = 1$. 如果 G 恰包含一个极小正规子群 N, 那么 $N = F(G)$.

7. 假设 G 的每一个非平凡同态像都包含一个非平凡的循环正规子群 (这样的群 G 称为**超可解的**), 那么 $G/F(G)$ 是交换群.

8. (Carter, [36]) 设 G 是可解群. 那么 G 恰包含一个满足 $N_G(A) = A$ 的幂零子群 A 的共轭类①.

9. 设 G 是可解群且 $p \in \pi(G)$. 假设对 G 的每一个 p 子群 P 有 $N_G(P)/C_G(P)$ 是 p 群. 那么 G 包含一个正规 p' 子群 N 使 G/N 是一个 p 群 (见 7.2.4 和 131 页习题 6).

10. 假设 G 的每一个极大子群是幂零的, 那么 G 是可解的.

11. 设 A, B 是 G 的满足 $G = AB$ 的交换子群, 那么 G 是可解群 (不要用 21 页习题 5).

6.2　Schur-Zassenhaus 定理

设 K 是群 G 的使

$$(|K|, |G/K|) = 1$$

的正规子群. 当 K 是交换群时, 在 58 页的 3.3.1 已经证明了 K 在 G 中有补且所有的补在 G 中共轭. 下面的定理推广了这个结果.

6.2.1　Schur-Zassenhaus 定理　设 K 是群 G 的使 $(|K|, |G/K|) = 1$ 的正规子群. 那么 K 在 G 中有补. 若进一步假设 K 或 G/K 可解, 那么 K 所有的补在 G 中共轭②.

---

① 这样的子群 A 称为 G 的 Carter 子群.

② 如果 H 是这样的一个补, 那么分解式 $G = KH$ 表明所有的补在 K 下是共轭的.

证明 设 $U \leqslant G$ 且 $N \trianglelefteq G$. 那么

$$UK/K \cong U/U \cap K \text{ 且 } (G/N)/(KN/N) \cong G/KN.$$

因此 $U \cap K$ 是使 $(|U \cap K|, |U/U \cap K|) = 1$ 的 U 的正规子群, 且 KN 是使 $(|KN/N|, |G/KN|) = 1$ 的 G/N 的正规子群. 于是, 假设对 G 的子群和商群都是遗传的. 如果进一步有 K 或 G/K 是可解的, 那么由 6.1.1, 这个性质也都是子群和商群遗传的.

现在对 $|G|$ 用归纳法来证明补的存在性. 于是, 可假设对所有阶小于 $|G|$ 且满足定理假设的群, 都存在这样的补, 并且可假设 $1 \neq K < G$.

设 $p \in \pi(K)$, $P \in \mathrm{Syl}_p K$ 且

$$U := N_G(P).$$

首先假定 $U \neq G$, 那么由归纳法得 $U \cap K$ 在 U 中有补 H. 由 Frattini 论断得到

$$G = KU = K(U \cap K)H = KH.$$

因此, 因 $H \cap K = H \cap (U \cap K) = 1$ 得到 H 也是 K 在 G 中的补.

现在假设 $U = G$. 那么 $P \trianglelefteq G$, 从而

$$N := Z(P) \overset{3.1.11}{\neq} 1$$

也是 G 的正规子群 (见 14 页 1.3.2). 设 $\overline{G} := G/N$. 由归纳法, 存在 $N \leqslant V \leqslant G$ 使 $\overline{V}$ 是 $\overline{K}$ 在 $\overline{G}$ 中的补. 那么

$$V \cap K = N \text{ 且 } G = KV.$$

因此 N 在 V 中的补也是 K 在 G 中的补. 如果 $V \neq G$, 那么由归纳法得补存在. 如果 $V = G$, 那么 $\overline{K} = 1$, K 是交换的. 于是由 58 页 3.3.1 得到所要的补.

若进一步假定 K 或 G/K 可解, 再次对 $|G|$ 用归纳法来证明所有的补在 G 中共轭. 设 H 和 H_1 是 K 在 G 中的两个补, N 是包含在 K 中的 G 的极小正规子群. 设 $\overline{G} := G/N$. 那么 $\overline{H}$ 和 $\overline{H_1}$ 是 $\overline{K}$ 在 $\overline{G}$ 中的补, 由归纳法得存在 $g \in G$ 使

$$HN = (H_1N)^g = H_1{}^gN.$$

于是 H 和 $H_1{}^g$ 是 N 在 HN 中的补. 如果 $N \neq K$, 那么 $HN \neq G$, 从而由归纳法得到 H 和 $H_1{}^g$ 在 HN 中共轭. 因此 H 和 H_1 在 G 中共轭.

假设 $N = K$. 如果 K 可解, 那么 N 是一个可解极小正规子群, 从而 N 是交换的 (见 95 页 6.1.3). 从 58 页 3.3.1 得到结论.

假设 K 非可解, 即有 $\overline{G} = G/K$ 可解. 那么 $\overline{G}$ 中存在正规子群 $\overline{A}$ 使 $K \leqslant A \trianglelefteq G$ 且 $\overline{G}/\overline{A}$ 是一个非平凡 p 群 (见 95 页 6.1.5). 用 Dedekind 等式可证明 $H \cap A$ 和 $H_1 \cap A$ 是 K 在 A 中的补, 于是由归纳法得到它们在 A 中共轭. 于是可以假设 (选取合适的共轭后)

$$H \cap A = H_1 \cap A := D \trianglelefteq \langle H, H_1 \rangle.$$

因为 $H/D \cong G/A \cong H_1/D$, 存在 $P \in \mathrm{Syl}_p H$ 和 $P_1 \in \mathrm{Syl}_p H_1$ 使

$$H = DP, \quad H_1 = DP_1.$$

又 $(|K|, |H|) = 1$ 蕴含了 P, P_1 是 $N_G(D)$ 的 Sylow p 子群. 因此由 Sylow 定理, 存在 $g \in N_G(D)$ 使 $P_1{}^g = P$. 于是 $H_1{}^g = D^g P_1{}^g = DP = H$. □

在 Schur-Zassenhaus 定理中要求的可解性假设本质上不失去其一般性. 这是因为: 由 $|K|$ 和 $|G/K|$ 互素得到 $|K|$ 和 $|G/K|$ 中至少有一个为奇数, 从而由 Feit-Thompson 定理得到 K 和 G/K 中必有一个群是可解的.

6.2.1 的结果将在 6.4 节中用到. 下面给出一个推论, 它在第 8 章的讨论中是重要的.

6.2.2　设群 G 作用在集合 Ω 上, K 是 G 的一个正规子群. 假设

(1) $(|K|, |G/K|) = 1$.

(2) K 或 G/K 可解且

(3) K 传递地作用在 Ω 上.

那么对 K 在 G 中的每一个补 H 有

(a) $C_\Omega(H) \neq \varnothing$, 且

(b) $C_K(H)$ 传递地作用在 $C_\Omega(H)$ 上.

证明　(a) 设 $\beta \in \Omega$. 由 (3) 得 $|\Omega|$ 是 $|K|$ 的因子 (见 46 页 3.1.5), $G = KG_\beta$ (Frattini 论断) 蕴含了 $G/K \cong G_\beta/K \cap G_\beta$. 把 Schur-Zassenhaus 定理应用到 $K \cap G_\beta$ 和 G_β 上, 得到 $K \cap G_\beta$ 在 G_β 中有补 H_1. 那么 H_1 也是使 $\beta \in C_\Omega(H_1)$ 的 K 在 G 中的补. 因为由 Schur-Zassenhaus 定理知道 K 在 G 中所有的补和 H_1 共轭, 所以 (a) 成立.

(b) 设 $\alpha, \beta \in C_\Omega(H)$ 且 $k \in K$ 使 $\alpha^k = \beta$. 那么 H 和 H^k 是 $K \cap G_\beta$ 在 G_β 中的两个补. 再次由 Schur-Zassenhaus 定理得到它们在 G_β, 甚至在 $K \cap G_\beta$ 下是共轭的. 设 $k' \in K \cap G_\beta$ 使 $H^{kk'} = H$. 那么 $\alpha^{kk'} = \beta$ 且

$$[kk', H] \leqslant H \cap K = 1,$$

即 $kk' \in C_K(H)$. □

如果在 6.2.2 中补 H 是一个 p 群 (在许多应用中都有这种情况), 那么因为 $(|H|, |\Omega|) = 1$, 所以 (a) 是 47 页 3.1.7 的一个结果, 由 Sylow 定理得所有的补

共轭.

习　题

1. 用下面的假设证明 Schur-Zassenhaus 定理中的补共轭:

对任意的单群 E, Aut $E/$Inn E 可解①.

设 G 是一个群, $p \in \mathbb{P}$, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ 且 $\pi' = \mathbb{P} \backslash \pi$.

2. 如果 $G/\Phi(G)$ 包含一个阶不被 p 整除的非平凡正规子群, 那么 G 也有一个阶不被 p 整除的非平凡正规子群.

3. 设 A 是 G 的幂零 π 子群且 $q \in \pi'$. 设 $И_X(A)$ 是 G 的 A 不变 q 子群的集合 $(X \leqslant G)$, $И^*_X(A)$ 是 $И_X(A)$ 的 (关于包含关系的) 极大元素的集合. 假设

(*) 对所有 $Q \in И_G(A)$, $O_{\pi'}(C_G(A) \cap N_G(Q))$ 传递地作用在 $И^*_{N_G(Q)}(A)$ 上.

那么下面的结论成立:

(a) G 的每一个包含 A 的幂零 π 子群 B 都能够取代 A 满足 (*).

(b) $И^*_G(B) \subseteq И^*_G(A)$, 其中, B 的定义同 (a).

6.3 根和剩余

本节以更一般的形式来看 6.1 节中的某些结论. 这里要进一步定义一些特征子群. 下设 $\mathcal{K}$ 是包含平凡群和一个给定的群及其同构象的群类. 对任何一个群 G,

$$O^{\mathcal{K}}(G) := \bigcap_{\substack{A \trianglelefteq G \\ G/A \in \mathcal{K}}} A \text{ 和 } O_{\mathcal{K}}(G) := \prod_{\substack{A \trianglelefteq G \\ A \in \mathcal{K}}} A$$

是 G 的特征子群. $O^{\mathcal{K}}(G)$ 称为 G 的 $\mathcal{K}$ **剩余**(residue), $O_{\mathcal{K}}(G)$ 叫做 G 的 $\mathcal{K}$ **根**(radical).

一般地, $O_{\mathcal{K}}(G)$ 和 $G/O^{\mathcal{K}}(G)$ 都不在 $\mathcal{K}$ 中. 例如, 如果 $\mathcal{K}$ 是循环群类, 那么对每一个交换群 G 有 $O^{\mathcal{K}}(G) = 1$ 和 $O_{\mathcal{K}}(G) = G$(见 2.1.3). 另一方面, 如果 $O_{\mathcal{K}}(G) \in \mathcal{K}$, 那么 $O_{\mathcal{K}}(G)$ 是包含在 $\mathcal{K}$ 中的 G 的最大的正规子群. 类似地, 如果 $G/O^{\mathcal{K}}(G) \in \mathcal{K}$, 那么 $O^{\mathcal{K}}(G)$ 是使其商群在 $\mathcal{K}$ 中的 G 的最小的正规子群.

本节关注下面的群类:

- 所有交换群的群类 $\mathcal{A}$.
- 所有幂零群的群类 $\mathcal{N}$.
- 所有可解群的群类 $\mathcal{S}$.
- 所有 p 群的群类 $\mathcal{P}(p \in \mathbb{P})$.
- 所有 π 群的群类 $\Pi(\pi \subseteq \mathbb{P})$.

---

① 这个假设称为 Schreier(施赖埃尔) 猜想, 至今只能用有限单群分类定理来证明它.

其中, 当 $\pi(G) \subseteq \pi \subseteq \mathbb{P}$ 时, 称 G 为 π群.

应用前面介绍的概念, 有

$$O_{\mathcal{N}}(G) = F(G), \quad O_{\mathcal{S}}(G) = S(G), \quad O_{\mathcal{P}}(G) = O_p(G)$$

和

$$O^{\mathcal{A}}(G) = G'.$$

设

$$O_\pi(G) := O_\Pi(G), \quad O^\pi(G) := O^\Pi(G).$$

于是对 $\pi' := \mathbb{P}\backslash\pi$, $O_{\pi'}(G)$ 和 $O^{\pi'}(G)$ 也可同样定义. 在 $\pi = \{p\}$ 时, 分别把 π 和 π' 写作 p 和 p'. 这给出了特别重要的子群

$$O_p(G),\ O^p(G) \text{ 和 } O_{p'}(G),\ O^{p'}(G).$$

如果 G 是 8 阶四元数群, 那么 $O_{\mathcal{A}}(G) = G$, 于是 $O_{\mathcal{A}}(G) \notin \mathcal{A}$.

对上面所提到的其他群类, 有

$$O_{\mathcal{K}}(G) \in \mathcal{K}.$$

当 $\mathcal{K} = \mathcal{N}$, $\mathcal{S}$, $\varPi$ 时, 分别由 5.2.1, 6.1.6 和 1.1.6 得此论断. 特别地, $O_p(G)$ 和 $O_{p'}(G)$ 分别是 G 的最大正规 p 子群和最大正规 p' 子群.

6.3.1　设 $\mathcal{K} \in \{\mathcal{N}, \mathcal{S}, \varPi\}$, 那么对每一个群 G, 有

$$O_{\mathcal{K}}(G) = \langle A | A \trianglelefteq\trianglelefteq G,\ A \in \mathcal{K} \rangle.$$

特别地, $O_{\mathcal{K}}(G)$ 是 G 中属于 $\mathcal{K}$ 的最大次正规子群.

证明　必须证明每一个含在 $\mathcal{K}$ 中的 G 的次正规子群 A 包含于 $O_{\mathcal{K}}(G)$. 对 $A \trianglelefteq G$, 这是显然的. 于是可假设 A 不正规于 G. 因此存在 $N \trianglelefteq G$ 使

$$A \trianglelefteq\trianglelefteq N < G.$$

对 $|G|$ 用归纳法, 可假设

$$A \leqslant O_{\mathcal{K}}(N).$$

因为 $O_{\mathcal{K}}(N)$ 特征于 N, 所以 $O_{\mathcal{K}}(N) \trianglelefteq G$. 又 $\mathcal{K} \in \{\mathcal{N}, \mathcal{S}, \varPi\}$, 由上面提到的知道 $O_{\mathcal{K}}(N) \in \mathcal{K}$. 因此 $A \leqslant O_{\mathcal{K}}(N) \leqslant O_{\mathcal{K}}(G)$. □

称群类 $\mathcal{K}$ 是**闭的**(closed), 如果对每一个 $X \in \mathcal{K}$ 有

- $\mathcal{K}$ 中的群的同态像在 $\mathcal{K}$ 中.
- $\mathcal{K}$ 中的群的子群在 $\mathcal{K}$ 中.

• $\mathcal{K}$ 中的群的直积在 $\mathcal{K}$ 中.

上面所提到的群类都是闭的. 类似 1.5.2 和 1.5.1 得

6.3.2 设 $\mathcal{K}$ 是一个闭群类. 那么对每一个群 G 有

(a) $G/O^{\mathcal{K}}(G) \in \mathcal{K}$.

(b) 对 G 的每一个同态 φ 有 $(O^{\mathcal{K}}(G))^{\varphi} = O^{\mathcal{K}}(G^{\varphi})$.

证明 (a) 从 24 页的 1.6.4 和闭类的定义得到 (a).

(b) 设 φ 是 G 的同态. 那么, 因 $G^{\varphi}/(O^{\mathcal{K}}(G))^{\varphi}$ 是 $G/O^{\mathcal{K}}(G)$ 的同态像而得到 $G^{\varphi}/(O^{\mathcal{K}}(G))^{\varphi} \in \mathcal{K}$, 即

$$O^{\mathcal{K}}(G^{\varphi}) \leqslant (O^{\mathcal{K}}(G))^{\varphi}.$$

现在设 ψ 是从 G^{φ} 到 $X \in \mathcal{K}$ 中的同态. 那么 $\varphi\psi$ 是从 G 到 X 的同态. 这意味着 $O^{\mathcal{K}}(G) \leqslant \mathrm{Ker}\,(\varphi\psi)$, 于是 $(O^{\mathcal{K}}(G))^{\varphi} \leqslant \mathrm{Ker}\ \psi$. 由此得到

$$(O^{\mathcal{K}}(G))^{\varphi} \leqslant \bigcap_{\psi} \mathrm{Ker}\psi = O^{\mathcal{K}}(G^{\varphi}),$$

其中, ψ 取遍从 G^{φ} 到 $\mathcal{K}$ 的某个群的同态. □

设 $\mathcal{K}$ 是一个闭群类. 与可解的定义类同, 如果

$$\text{对 } G \text{ 的所有非平凡子群 } U \text{ 都有 } O^{\mathcal{K}}(U) \neq U,$$

就把群 G 称为 $\mathcal{K}$群.

把由所有 $\mathcal{K}$ 群组成的类记作 $\widehat{\mathcal{K}}$. 显然 $\mathcal{K} \subseteq \widehat{\mathcal{K}}$.

例如, 由定义得 $\widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{S}$ 和 $\widehat{\mathcal{N}} = \widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.

由 6.3.2, 用和 6.1.1 的证明相同的方法可证 $\mathcal{K}$ 群的同态像和子群也是 $\mathcal{K}$ 群. 由 6.1.2 的证明得到

6.3.3 设 $\mathcal{K}$ 是一个闭类. 那么 $G \in \widehat{\mathcal{K}}$ 当且仅当存在 $N \trianglelefteq G$ 使 $N \in \widehat{\mathcal{K}}$ 且 $G/N \in \widehat{\mathcal{K}}$. □

从 6.3.3, 作为推论有 (对比 95 页 6.1.6)

6.3.4 设 $\mathcal{K}$ 是一个闭类. 那么 $O_{\widehat{\mathcal{K}}}(G) \in \widehat{\mathcal{K}}$. □

6.3.5 设 $\mathcal{K}$ 是一个闭类. 那么 $\widehat{\mathcal{K}}$ 也是闭的. □

6.3.6 设 $\mathcal{K}$ 是一个闭类. 那么下面的结论等价:

(i) $G \in \widehat{\mathcal{K}}$.

(ii) 如果 $G^{(0)} = G$, $G^{(i)} = O^{\mathcal{K}}(G^{(i-1)})$, $i \geqslant 1$, 那么存在 $\ell \in \mathbb{N}$ 使 $G^{(\ell)} = 1$.

(iii) G 有一个所有合成因子都在 $\mathcal{K}$ 中的合成列. □

对 π 群类 Π 有 $\Pi = \widehat{\Pi}$. 而对 π 闭群类没有类似的等式.

一个群 G 称为 π闭的, 如果 $G/O_{\pi}(G)$ 是 π' 群. 换句话就是说, 如果

$$O_\pi(G) = O^{\pi'}(G)^{①}.$$

例如, Schur-Zassenhaus 定理是一个关于 π 闭群的定理, $\pi := \pi(K)$. 在它的证明中, 用到了 π 闭群的子群和商群都是 π 闭群. 因为 π 闭群的直积也是 π 闭的, 所以所有的 π 闭群组成的类是一个闭类. 把这个类记作 Π_c.

Π_c 包含所有的 π 群和 π' 群. $\widehat{\Pi}_c$ 中的群称为 **π可分的**(separable)②. 因为 Π_c 是一个闭类, 同前面所解释的那样, π 可分群具有和可解群同样形式的性质.

习　题

设 G 是一个群.

1. 设 $\mathcal{C}$ 是所有满足 $C_H(F(H)) \leqslant F(H)$ 的群 H 组成的类. 那么下面的结论成立:

(a) $O_{\mathcal{C}}(G) \in \mathcal{C}$ 且 $G/O^{\mathcal{C}}(G) \in \mathcal{C}$.

(b) 设 $N \trianglelefteq G$. 如果 N, G/N 都在 $\mathcal{C}$ 中, 那么 G 也在 $\mathcal{C}$ 中.

6.4　π 可分群

本节研究 π 可分群 ($\pi \subseteq \mathbb{P}$). π 可分群满足下面的条件:

- G 的每一个非平凡子群都有一个非平凡的 π 闭商群.

因为交换群是 π 闭的, 所以有

6.4.1　可解群是 π 可分的. □

因此, 所有关于 π 可分群的结论也是关于可解群的结论. 在介绍一些方便的记号之后, 将给出这些结论. 在本节的后半部分, 将在 π 可分群的范围内刻画可解群. 将证明可解群可被 Sylow 定理的推广所刻画. 这由 P.Hall 所证明, 并且成为今天高度成熟的可解群理论的起始点. 关于这方面, 推荐 Doerk-Hawkes 的专著 [8].

6.4.2　群 G 是 π 可分的当且仅当 G 有一个特征子群 A_i $(i = 1, \cdots, n)$ 的列

$$1 = A_0 < A_1 < \cdots < A_{i-1} < A_i < \cdots < A_n = G,$$

使每一个因子 A_i/A_{i-1} 是 π 群或 π' 群.

证明　设 G 是 π 可分的. 那么 $O^{\Pi_c}(G)$ 也是 π 可分的③ 且

$$\overline{G} := G/O^{\Pi_c}(G)$$

① 对照 3.2.2 后关于 p 群的评注.

② 对此抽象定义不乐意的人更喜欢采用 6.4.2 给出的等价性质.

③ Π_c 是闭群类.

是 π 闭的. 因此 $\overline{G}/O_\pi(\overline{G})$ 是 π' 群. 因为 $O^{\Pi_c}(G)$ 在 G 中特征, $O^{\Pi_c}(G)$ 的特征子群和 $\overline{G}$ 的特征子群的逆像都在 G 中是特征的. 于是, 对 $|G|$ 用归纳法得到所要的 G 的列.

反之, 设 $(A_i)_{i=0,\cdots,n}$ 同 6.4.2 中所述. $G^{(i)}$ 同 6.3.6 中所述, 那么 $G^{(1)}$ 包含在 A_{n-1} 中, 且更一般地有 $G^{(i)} \leqslant A_{n-i}$; 特别 $G^{(n)}=1$. 于是 6.3.6 蕴含了 G 是 π 可分的. □

显然一个群是 π 可分的当且仅当它是 π' 可分的.

对群 G, 定义子群 $O_{\pi'\pi}(G)$ 为

$$O_{\pi'\pi}(G)/O_{\pi'}(G) := O_\pi(G/O_{\pi'}(G))$$

和 $O_{\pi'\pi\pi'}(G) \leqslant G$ 为

$$O_{\pi'\pi\pi'}(G)/O_{\pi'\pi}(G) := O_{\pi'}(G/O_{\pi\pi'}(G)).$$

如此下去, 可以得到一个特征子群列

$$1 \leqslant O_{\pi'}(G) \leqslant O_{\pi'\pi}(G) \leqslant O_{\pi'\pi\pi'}(G) \leqslant O_{\pi'\pi\pi'\pi}(G) \leqslant \cdots,$$

它以 G 为终点当且仅当 G 是 π 可分的.

对特别重要的情况 $\pi=\{p\}$, 这个列就是

$$1 \leqslant O_{p'}(G) \leqslant O_{p'p}(G) \leqslant O_{p'pp'}(G) \leqslant O_{p'pp'p}(G) \leqslant \cdots.$$

6.4.3 设 G 是 π 可分群且 $O_{\pi'}(G)=1$. 那么

$$C_G(O_\pi(G)) \leqslant O_\pi(G).$$

证明 设 $C := C_G(O_\pi(G))$ 且 $K := C \cap O_\pi(G)$ $(= Z(O_\pi(G)))$. 那么, 因为 $O_\pi(G)$ 是 G 的最大的正规 π 子群, 所以 C/K 是 G/K 的满足 $O_\pi(C/K)=1$ 的 π 可分正规子群. 设 $K \leqslant A \leqslant C$ 使 $A/K = O_{\pi'}(C/K)$. 那么由 Schur-Zassenhaus 定理得 K 在 A 中有补 H, 从而由 $A \leqslant C$ 有

$$A = KH = K \times H.$$

这蕴含了 $H = O_{\pi'}(A)$, 于是 $H \leqslant O_{\pi'}(G)=1$. 因此 $O_{\pi'}(C/K)=1=O_\pi(C/K)$, 从而 $C=K$. □

下面的结果由 6.4.3 得到的一些常用的结论组成:

6.4.4 设 G 是 p 可分的 $(p\in\pi(G))$, P 是 $O_{p'p}(G)$ 的一个 Sylow p 子群.

(a) $C_G(P) \leqslant O_{p'p}(G)$. 特别地,

$$O_{p'}(G) = 1 \Rightarrow C_G(O_p(G)) \leqslant O_p(G).$$

(b) 设 U 是 G 的一个 P 不变 p' 子群. 那么 $U \leqslant O_{p'}(G)$.

(c) 如果 G 有交换 Sylow p 子群, 那么 $G = O_{p'pp'}(G)$.

证明　(a) 由 53 页的 3.2.8 可以假设 $O_{p'}(G) = 1$. 那么 $P = O_p(G)$, 由 6.4.3 即得到结论.

(b) 再可假设 $O_{p'}(G) = 1$. 那么 $P = O_p(G)$, 从而 $[U, P] \leqslant U \cap P = 1$. 于是由 (a) 得到 $U \leqslant O_{p'}(G) = 1$.

(c) 设 $P \leqslant S \in \mathrm{Syl}_p G$, S 是交换的. 那么 $S \leqslant C_G(P)$, 于是由 (a) 得到 $S = P$. □

群 G 的 π 子群 H 称为 G 的**Hall π 子群**, 如果有

$$\pi(|G : H|) \subseteq \pi'.$$

例如, 对 $p \in \mathbb{P}$, G 的 Hall p 子群就是 G 的 Sylow p 子群. 同 Sylow 子群一样, 用 $\mathrm{Syl}_\pi G$ 表示 G 的 Hall π 子群的集合.

和 $\pi = \{p\}$ 时的 Sylow 定理不同的是, 一般情况下 Hall π 子群是不存在的. 例如, 交错群 A_5 有 Hall $\{2,3\}$ 子群, 但是没有 Hall $\{3,5\}$ 子群和 Hall $\{2,5\}$ 子群 (见 54 页 3.2.12).

分别用同 3.2.2 的证明方法和 3.2.5 的证明方法, 得到

- 设 $\mathrm{Syl}_\pi G \neq \varnothing$, 那么

$$O_\pi(G) = \bigcap_{H \in \mathrm{Syl}_\pi G} H.$$

- 设 $H \in \mathrm{Syl}_\pi G$ 且 $N \trianglelefteq G$, 那么

$$N \cap H \in \mathrm{Syl}_\pi N \text{ 且 } NH/N \in \mathrm{Syl}_\pi G/N.$$

6.4.5　每一个 π 可分群都包含 Hall π 子群.

证明　设 $G \neq 1$ 是一个 π 可分群且 $1 \neq N \trianglelefteq G$. 因为 G/N 也是一个 π 可分群, 可对 $|G|$ 用归纳法, 可假设 G/N 包含一个 Hall π 子群

$$H/N \quad (N \leqslant H \leqslant G).$$

如果 $O_\pi(G) \neq 1$, 选取 $N := O_\pi(G)$. 那么 H 是 G 的 Hall π 子群.

假设 $O_\pi(G) = 1$. 那么 $1 \neq O_{\pi'}(G)$, 选取

$$N := O_{\pi'}(G).$$

这样. N 是 G 的 π' 正规子群且 $\pi(H/N) \subseteq \pi$. 由 Shur-Zassenhaus 定理得到 N 在 H 中有补 H_1. 这个补就是 G 的 Hall π 子群. □

如果 G 的每个 π 子群都包含在 G 的某个 Hall π 子群中, 且所有的 Hall π 子群在 G 中共轭, 说在 G 中π **Sylow 定理成立**.

6.4.6 设 G 是满足下面条件的 π 可分群:

(*) G 的每一个 π 截断或 π' 截断都是可解的①.

那么在 G 中 π Sylow 定理成立.

证明 设 U 是 G 的 π 子群, H 是 G 的 Hall π 子群. 只要证明 U 包含在 H 的一个共轭中就足够了. 对 $|G|$ 用归纳法来证明它.

显然, 可假设 $G \neq 1$. 设 $1 \neq N \trianglelefteq G$ 且 $\overline{G} := G/N$. 由归纳法, 存在 $\overline{g} \in \overline{G}$ 使 $\overline{U^g} \leqslant \overline{H}$ 从而有 $(UN)^g = U^g N \leqslant HN$. 因为可以用 U 的任一个共轭来替换 U, 所以可假设

$$U \leqslant HN.$$

现在同 6.4.5 中那样进行: 如果 $O_\pi(G) \neq 1$, 选取 $N := O_\pi(G)$. 那么有 $HN = H$, 从而 $U \leqslant H$. 假设 $O_\pi(G) = 1$. 那么 $1 \neq O_{\pi'}(G)$, 选取 $N := O_{\pi'}(G)$. 那么 π 子群 U 是 N 在 NU 中的补. 因为 $H \cap NU$ 也是 N 在 NU 中的补 (见 1.1.11), 所以由 Schur-Zassenhaus 定理得到 U 和 H 的子群 $H \cap NU$ 共轭. □

因为可解群是 π 可分的, 所以 6.4.6 蕴含了

6.4.7 对每个 $\pi \subseteq \mathbb{P}$, 在可解群中 π Sylow 定理成立. □

结论 6.4.7 事实上刻画了可解群. 为了证明它, 需要两个引理.

6.4.8 设 H, K 是 G 的使

$$(|G:H|, |G:K|) = 1$$

的子群. 那么 $G = HK$ 且 $|G : H \cap K| = |G:H||G:K|$.

证明 由 1.1.6,

$$n := \frac{|G|}{|HK|} = \frac{|G||H \cap K|}{|H||K|}.$$

因此 n 是 $|G:H|$ 和 $|G:K|$ 的因子. 因为这两个整数互素, 所以有 $n = 1$, 从而 $G = HK$. 于是有

$$|G:H||G:K| = \frac{|G|^2}{|H||K|} \overset{1.1.6}{=} \frac{|G|^2}{|G||H \cap K|} = |G : H \cap K|. \qquad \square$$

6.4.9 设 H_1, H_2 和 H_3 是群 G 的可解子群, 且满足

$$G = H_1H_2 = H_1H_3 \text{ 和 } (|G:H_2|, |G:H_3|) = 1.$$

---

① π 截断就是一个为 π 群的截断.

那么 G 可解.

证明 如果 $H_1 = 1$, 那么 $G = H_2$ 可解. 假设 $H_1 \neq 1$. 设 A 是 H_1 的极小正规子群. 那么 A 是 p 群 (见 6.1.3). 因为 $(|G : H_2|, |G : H_3|) = 1$, 可假设 p 不整除 $|G : H_2|$. 于是 H_2 包含 G 的一个 Sylow p 子群. 由 Sylow 定理, 存在 $g \in G$ 使 $A \leqslant H_2{}^g$. 因为 $G = H_2H_1$. 可假设 $g \in H_1$. 由此得到 $A^{g^{-1}} = A \leqslant H_2$, 从而

$$N := \langle A^G \rangle = \langle A^{H_1H_2} \rangle = \langle A^{H_2} \rangle \leqslant H_2.$$

因此 N 是 G 的可解正规子群. 因为 G/N 满足假设, 所以对 $|G|$ 用归纳法得 G/N 可解. 于是 G 也可解 (见 6.1.2). □

设 G 是一个群.G 的 Sylow 子群的集合 $\mathcal{S}$ 称为 G 的**Sylow 系**(system), 如果有

- $|\mathcal{S} \cap \mathrm{Syl}_p G| = 1, \ \forall p \in \pi(G)$ 且
- $PQ = QP, \ \forall P, Q \in \mathcal{S}$.

设 $\mathcal{S}$ 是 G 的一个 Sylow 系. 那么对每一个非空子集 $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, 重复运用 1.1.5 和 1.1.6 证得群

$$\prod_{P \in \mathcal{S}_0} P$$

是 G 的一个 Hall π 子群, 其中,

$$\pi = \{p \in \pi(G) | (\mathrm{Syl}_p G) \cap \mathcal{S}_0 \neq \varnothing\}.$$

假设 $\pi(G) = \{p, q\}$, 那么, 对每一个 $P \in \mathrm{Syl}_p G$ 和 $Q \in \mathrm{Syl}_q G$ 有 $PQ = QP = G$. 于是, 每一个这样的子群偶是 G 的一个 Sylow 系. 又由前面提到过的 Burnside 的一个定理, 证明了 G 是可解的, 将在 10.2 节中证明这个定理.

下面的定理就是上面所说的对可解群的刻画, 它证明了一般情况下 Sylow 系的存在性等价于可解性. 推断 (v) ⇒ (i) 的证明需要 Burnside 定理.

6.4.10 定理(P.Hall)① 设 G 是一个群. 下面的结论是等价的:

(i) G 可解.

(ii) 对每一个素数集合 π, G 是 π 可分的.

(iii) 对每一个素数集合 π, G 包含一个 Hall π 子群.

(iv) 对每一个素数 p, G 包含一个 Hall p' 子群.

(v) G 有一个 Sylow 系.

证明 (i) ⇒ (ii). 由 6.4.1 可得到.

(ii) ⇒ (iii). 由 6.4.5 可得到.

---

① 见文献 [63], [65] 和 [66].

(iii) $\Rightarrow$ (iv). 这个证明是平凡的.

(iv) $\Rightarrow$ (v). 对 $p \in \pi(G)$, 设 H_p 是 G 的 Hall p' 子群, 且对 $\varnothing \neq \pi \subseteq \pi(G)$, 设

$$H_\pi := \bigcap_{p\in\pi} H_p.$$

首先证明

($'$) H_π 是 G 的 Hall π' 子群.

在 $|\pi|$ 上运用归纳法从 6.4.8 得到 ($'$). 当 $|\pi| = 1$ 时, 没什么可证明的. 假设 $|\pi| \geqslant 2$ 且设 $p \in \pi$ 和 $\sigma := \pi\backslash\{p\}$. 那么

$$H_\pi = H_\sigma \cap H_p.$$

因为由归纳法得 H_σ 是一个 Hall σ' 子群, 关于 H_σ 和 H_p 能够运用 6.4.8. 从而得到 ($'$).

特别地, 对 $p_i \in \pi(G)$,

$$P_i := \bigcap_{p\in\pi(G)\backslash\{p_i\}} H_p$$

是 G 的一个 Sylow p_i 子群. 设 $p_i, p_j \in \pi(G)$. 那么 P_i, P_j 是

$$H := \bigcap_{p\in\pi(G)\backslash\{p_i,p_j\}} H_p$$

的子群, 且由 ($'$) 得到 H 是 G 的 Hall $\{p_i, p_j\}$ 子群. 由此得到 $P_iP_j = P_jP_i = H$. 因此 $\{P_i | p_i \in \pi(G)\}$ 是 G 的 Sylow 系.

(v) $\Rightarrow$ (i). 如果 $|\pi(G)| = 1$, 那么 G 是一个 p 群从而可解. 如果 $|\pi(G)| = 2$, 那么从 210 页 10.2.1 得到 G 的可解性. 现在假设 $|\pi(G)| \geqslant 3$ 且 $\{P_1, \cdots, P_n\}$ 是 G 的一个 Sylow 系. 对 $i \in \{1,2,3\}$ 设

$$H_i = \prod_{j\neq i} P_j.$$

那么 $|G:H_1|, |G:H_2|$ 和 $|G:H_3|$ 两两互素且

$$G = H_1H_2 = H_1H_3 = H_2H_3,$$

并且因为 $\{P_1, \cdots, P_n\}\backslash\{P_i\}$ 是 H_i 的 Sylow 系, 对 $|G|$ 用归纳法, 可假设 H_i, H_2 和 H_3 是可解的. 因此由 6.4.9 证得 G 是可解的. □

以 π 可分群的一个性质来结束本节, 此性质将在第 12 章中用到. 当 $\pi = \{p\}$ 时, 这个性质就是 Baer 定理 (见 6.7.6) 的一个结论, 因此对非 p 可分群也成立.

6.4.11　设 G 是一个 π 可分群, A 是 G 的 π 子群. 那么下面的论断是等价的:

(i) $A \not\leqslant O_\pi(G)$.

(ii) 存在 $x \in O_{\pi\pi'}(G)$ 使 $x \in \langle A, A^x\rangle$ 且 $\langle A, A^x\rangle$ 不是 π 群.

证明　如果 $A \leqslant O_\pi(G)$, 那么 $\langle A, A^x\rangle \leqslant O_\pi(G)$. 于是证明了 (ii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). 设 $\overline{G} := G/O_\pi(G)$. 假设对所有的 $x \in O_{\pi\pi'}(G)$ 都有 $\langle A, A^x\rangle$ 是一个 π 群. 那么

$$[O_{\pi'}(\overline{G}), \overline{A}] = 1,$$

从而由 6.4.3 得 $\overline{A} = 1$, 这和 $A \not\leqslant O_\pi(G)$ 矛盾. 因此存在 $x \in O_{\pi\pi'}(G)$ 使 $\langle A, A^x\rangle$ 不是 π 群. 设

$$G_1 := \langle A, A^x\rangle \quad (\leqslant O_{\pi\pi'}(G)A).$$

则有 $A \not\leqslant O_\pi(G_1)$ 或 $A^x \not\leqslant O_\pi(G_1)$. 不妨设 $A \not\leqslant O_\pi(G_1)$. 如果 $G_1 < G$, 由在 $|G|$ 上的归纳法, 存在 $y \in O_{\pi\pi'}(G_1)$ 使 $y \in \langle A, A^y\rangle$ 且 $\langle A, A^y\rangle$ 不是 π 群. 另外, 存在 $b \in O_{\pi\pi'}(G)$, $a \in A$ 使 $y = ab$. 从而 $b \in G_1$ 且 $\langle A, A^b\rangle$ 不是 π 群, 结论成立 *. 如果 $G = G_1$, 那么 (ii) 显然成立. □

习　题

1. 设 G 是 p 可分群, $p \in \pi(G)$. 假定对所有的 $q \in \pi(G)$ 和 $S \in \mathrm{Syl}_q G$ 有

$$\mathrm{Syl}_p N_G(S) \subseteq \mathrm{Syl}_p G.$$

那么 $G = O_{p'p}(G)$.

2. (关于 6.4.11 的一个例子) 设 $G := S_5$ 且 $A := \langle(12)\rangle \leqslant G$. 那么存在 $\pi \subseteq \pi(G)$ 使 $A \not\leqslant O_\pi(G)$ 且

$$\text{对所有的 } x \in G,\ \langle A, A^x\rangle \text{ 是一个 } \pi \text{ 群}.$$

3. 设 G 是一个 p 可分群.G 的 p长(length) $\ell_p(G)$ 递归地定义为

如果 $G = O_{p'}(G)$, $\ell(G) := 0$, 而如果 $G \neq O_{p'}(G)$, $\ell_p(G) := 1 + \ell(G/O_{p'p}(G))$.

证明 $\ell_p(G) \leqslant c(P)$, $P \in \mathrm{Syl}_p G$.

6.5　分支和广义 Fitting 子群

本节题目中所提到的概念是 1970 年左右在有限单群分类的过程中出现的. 它们是恰如其分概念的范例, 对分类的新进展有着本质的影响. 这些概念作为一种语言有助于新发展的成功[①].

---

* 为方便读者理解, 译者增加了此处归纳法过程, 原书此处无详细过程.

① 指的是有限单群的分类.

群 $K \neq 1$ 称为**拟单的**(quasisimple), 如果 K 是完备的且 $K/Z(K)$ 是单群. 显然, 对拟单群 K 的每一个次正规子群 N 有

$$N \leqslant Z(K) \text{ 或} N = K.$$

这蕴含了拟单群的非平凡同态像是拟单的.

设 G 是一个群. G 的子群 K 称为 G 的**分支**(component), 如果 K 是拟单的且 K 在 G 中次正规. 这两个性质中的第 1 个是 K 的内在性质, 而第 2 个描述了 K 在 G 中的嵌入. 因此分支一般具有和次正规子群类似的继承性质:

- 如果 $K \leqslant U \leqslant G$, 那么 K 是 U 的分支.
- 如果 $K \nleqslant N \trianglelefteq G$, 那么 KN/N 是 G/N 的分支.
- 如果 K 是 G 的次正规子群的分支, 那么 K 是 G 的分支.

G 的极小次正规子群是单群. 因此, 非交换极小次正规子群是 G 的分支.

6.5.1 设 Z 和 E 是 G 的两个子群, 使得 $Z \leqslant Z(G)$ 且 EZ/Z 是 G/Z 的分支. 那么 E' 是 G 的分支.

证明 因为 $Z \leqslant Z(G)$ 有 $E' = (EZ)'$, 又因为 $EZ \trianglelefteq\trianglelefteq G$, 所以有 $E' \trianglelefteq\trianglelefteq G$, 且由 20 页 1.5.3 得到 E' 是完备的. 设 N 是 E' 的正规子群且 $\overline{G} := G/Z$. 那么有

$$\overline{N} = \overline{E} = \overline{E'} \text{ 或 } \overline{N} \leqslant Z(\overline{E}).$$

由第 1 种情形得到 $N \leqslant E' \leqslant NZ$, 于是 $N(Z \cap E') = E'$. 又因为 E' 是完备的, 因此 $N = E'$. 由第 2 种情形得到 $[E', N] \leqslant Z$, 从而有

$$[E', N, E'] = 1 = [N, E', E'].$$

由三子群引理 (见 21 页 1.5.6) 得 $[E', E', N] = 1$, 于是再因 E' 是完备的有 $[E', N] = 1$. 因此 $N \leqslant Z(E')$, 从而 E' 是拟单的. □

6.5.2 设 K 是 G 的分支, U 是 G 的次正规子群. 那么 $K \leqslant U$ 或 $[U, K] = 1$.

证明 显然, $U = G$ 蕴含 $K \leqslant U$, 并且同前面提到的那样, $K = G$ 蕴含 $U = K$ 或 $[U, K] = 1$. 于是可以假设存在 G 的真正规子群 N 和 M 使

$$K \leqslant N < G, \quad U \leqslant M < G.$$

特别地, 有

$$U_1 := [U, K] \leqslant N \cap M,$$

从而 $K \leqslant N_N(U_1) =: G_1$(见 20 页 1.5.5). 于是 K 是 G_1 的分支, U_1 在 G_1 中次正规 (实际上为正规). 对 $|G|$ 用归纳法, 应用于 G_1 上, 得到

$$[U_1, K] = 1 \text{ 或 } K \leqslant U_1.$$

根据第 1 种情况得到

$$1 = [U, K, K] = [K, U, K].$$

于是用三子群引理得到

$$1 = [K, K, U] = [K', U] = [K, U].$$

因为 $[K,U] \leqslant M$, 由第 2 种情况得到 $K \leqslant M$. 把对 $|G|$ 的归纳法用到 M 上得结论. □

6.5.3　设 K_1, K_2 是 G 的分支. 那么或者 $K_1 = K_2$ 或者 $[K_1, K_2] = 1$. 特别地, 分支的积是 G 的子群.

证明　当 $[K_1, K_2] \neq 1$ 时, 6.5.2 蕴含了 $K_1 \leqslant K_2$, 由对称性也有 $K_2 \leqslant K_1$. 于是 $K_1 = K_2$. □

现在定义 G 的两个特征子群.

$E(G)$: 由 G 的分支生成的子群,

$F^*(G) := F(G)E(G)$.

$F^*(G)$ 称为 G 的**广义 Fitting 子群**(generalized Fitting subgroup). 由 6.5.2

$$[F(G), E(G)] = 1.$$

设 N 是 G 的极小正规子群. 由 1.7.3 得到或者 N 是交换的且 $N \leqslant F(G)$, 或者 N 是分支的积且 $N \leqslant E(G)$. 因此有

6.5.4　$F^*(G)$ 包含 G 的每一个极小正规子群. 特别地, 若 $G \neq 1$ 则有 $F^*(G) \neq 1$. □

6.5.5　(a) 设 K 是 G 的使 $Z(K) = 1$ 的分支. 那么 $\langle K^G \rangle$ 是 G 的极小正规子群. 特别地, $\langle K^G \rangle$ 是和 K 共轭的分支的直积.

(b) 设 $F(G) = 1$. 那么 $E(G)$ 是 G 的极小正规子群的积.

证明　(a) 由 6.5.3, $\langle K^G \rangle$ 是分支 $K^g (g \in G)$ 的中心积, 于是因 K 单, 由 1.6.7 知它是一个直积. 设 N 是包含在 $\langle K^G \rangle$ 中的 G 的极小正规子群. 那么根据 1.6.3 得, 至少有一个因子 K^g 在 N 中. 因此 $N = \langle (K^g)^G \rangle = \langle K^G \rangle$.

(b) 由 6.3.1 得, 对 G 的每一个分支 K 有 $Z(K) \leqslant F(G)$. 于是由假设 $F(G) = 1$ 得到 G 的所有分支都是单的, 从而由 (a) 得到 (b). □

一般地, 有

6.5.6　设 $E(G) \neq 1$ 且 $K_1, \cdots, K_n$ 是 G 的分支. 令

$$Z := Z(E(G)), \quad Z_i := Z(K_i), \quad E_i := K_i Z/Z \ (i = 1, \cdots, n).$$

(a) $E(G)$ 是 $K_1, \cdots, K_n$ 的中心积. 特别有 $Z = Z_1 \cdots Z_n$.

(b) $Z_i = Z \cap K_i$ 且 $E_i \cong K_i/Z_i$ $(i = 1, \cdots, n)$.

(c) $E(G)/Z = E_1 \times \cdots \times E_n$.

证明 设 $Z_0 = \prod_{i=1}^{n} Z_i$. 由 6.5.3, $E(G)$ 是正规子群 $K_1Z_0, \cdots, K_nZ_0$ 的积, 且

$$K_iZ_0 \cap \prod_{i \neq j} K_jZ_0 = Z_0.$$

于是由 1.6.2 和 1.6.7 得到 $Z_0 = Z$ 和 (a)~(c). □

6.5.7 设 L 是 G 的次正规子群.

(a) 如果 $L \leqslant F^*(G)$, 那么 $L = (L \cap F(G))(L \cap E(G))$.

(b) $F^*(L) = F^*(G) \cap L$.

(c) $E(L)C_{E(G)}(L) = E(G)$. 特别地, $E(L)$ 正规于 $E(G)$.

证明 因为 L 是 G 的次正规子群, 所以 L 的每一个分支也是 G 的分支, 且 $F(L) \leqslant F(G)$ (见 6.3.1). 于是运用 6.5.2, 6.5.6(a) 和 $[F(G), E(G)] = 1$ 就得到结论. □

下面是 $F^*(G)$ 的基本性质. 它推广了 6.1.4:

6.5.8 定理 设 G 是一个群. 那么 $C_G(F^*(G)) \leqslant F^*(G)$.

证明 设 $L := C_G(F^*(G))$, $Z := Z(L)$ 以及 $\overline{L} := L/Z$. 因为 $F^*(\overline{L}) = 1$ 蕴含 $\overline{L} = 1$ 和 $L \leqslant Z \leqslant F^*(G)$, 所以只要证明 $F^*(\overline{L}) = 1$ 就够了.

由 6.5.7 得到 $F^*(L) \leqslant F^*(G)$, 于是有

$$F^*(L) = Z.$$

因此, $F(\overline{L})$ 在 L 中的逆像是 L 的幂零正规子群 (见 79 页 5.1.2), 从而含于 $F(L)$ 中. 由此得到 $F(\overline{L}) = 1$. 如果 $F^*(\overline{L}) \neq 1$, 那么 $\overline{L}$ 包含分支 $\overline{E}$, $Z < E \leqslant L$. 但是 E' 是 L 的分支 (见 6.5.1), 这和 $F^*(L) = Z$ 矛盾. □

习 题

设 G 是群.

1. 描述 $F^*(C_G(E(G)))$ 和 $F^*(C_G(F(G)))$.

2. 设 t 是 G 的一个对合且 E 是 $C_G(t)$ 的一个分支. 那么 E 正规化 G 的每一个分支.

3. 设对 G 的每一个分支 E 有 Aut E/Inn E 可解且 $F(G) = 1$. 那么, 对 G 的每一个对合 t 有

$$E(C_G(t)) \leqslant E(G).$$

4. 设 $K \leqslant G$. 假设对每一个 $g \in G$ 有

$$K \text{ 是 } \langle K, K^g \rangle \text{ 的分支}.$$

那么 K 是 G 的分支 (对照 122 页 6.7.4).

6.6　本原极大子群

本节研究极大子群的嵌入性质. 设 M 是群 G 的极大子群, 且 N 是 G 的正规子群. 如果 $N \leqslant M$, 那么 M/N 是 G/N 的极大子群. 因此, 可假设 M(在用一个合适的商群替代 G 后, 这是可能的) 中不含有 G 的非平凡正规子群. 那么 M 满足

(*) $1 \neq N \trianglelefteq M \Rightarrow M = N_G(N)$.

(**) $1 \neq N \trianglelefteq G \Rightarrow G = MN$.

因为嵌入性质 (*) 也将会是以后的研究中心, 所以把 G 的一个真子群 M(不一定是极大子群) 称为**本原的**(primitive), 如果 M 满足 (*).

由以前知道本原置换群的点稳定子是本原子群. 反之, 在本原极大子群 M 的右陪集上 (通过右乘) 的作用或在 M 的共轭子群上的作用是忠实的和本原的.

下面, 从本原子群的两个初等性质开始进行研究.

6.6.1　设 M 是 G 的本原子群, N 是 G 的正规子群且满足 $M \cap N \neq 1$. 那么 $C_G(N) = 1$.

证明　由 $1 \neq M \cap N \trianglelefteq M$ 和 M 的本原性得到

$$C_G(N) \leqslant C_G(N \cap M) \leqslant M.$$

于是由 $C_G(N) \trianglelefteq G$ 得到 $C_G(N) = 1$. □

6.6.2　设 M 是 G 的本原子群. 那么 M 不包含 G 的非平凡次正规子群.

特别地, $M \cap F(G) = 1$.

证明　假设存在 G 的次正规子群 $L \neq 1$ 使得 $L \leqslant M$, 由此来导出矛盾. 不失一般性, 可以进一步假设 L 是 G 的极小次正规子群. 那么 $L \leqslant F^*(G)$, 运用 6.6.1 到 $N = F^*(G)$ 上得到

$$1 = Z(F^*(G)) \,(= Z(F(G))Z(E(G))).$$

特别地, $F(G) = 1$(见 5.1.5). 由此得到 L 是 G 的一个分支. 于是, 由 6.5.6 证得 $\langle L^M \rangle$ 正规于 $E(G)$. 因此由 M 的本原性得到 $E(G) \leqslant M$, 那么再由 M 的本原性得到 $E(G) = 1$. 这和 $L \neq 1$ 矛盾. □

6.6.3　设 M 是 G 的本原子群, $p \in \pi(M)$ 且 N 是 G 的一个正规子群. 再假设 $M \cap N = 1$, 且 $O_p(M) \neq 1$. 则

(a) $p \notin \pi(N)$.

(b) 对每一个 $q \in \pi(N)$, N 中存在唯一的 M 不变 Sylow q 子群.

(c) 如果 $|\pi(N)| \geqslant 2$, 那么 M 不是 G 的极大子群.

证明 (a) 对 $P := O_p(M)$, 由 M 的本原性得到

$$M = N_G(P).$$

特别地, 因 $N \cap M = 1$ 得到 P 是 NP 的 Sylow p 子群 (见 48 页 3.1.10). 这蕴含了 $p \notin \pi(N)$(见 3.2.5).

(b) PN 由共轭作用在 $\Omega := \mathrm{Syl}_q N$ 上, 且由 Sylow 定理知道 N 是 PN 的传递正规子群. 因此运用 6.2.2 到 PN 和 Ω 上, 得到 $C_\Omega(P) \neq \varnothing$ 且 $C_N(P)$ 在 $C_\Omega(P)$ 上传递. 于是由 $C_N(P) \leqslant M \cap N = 1$ 得 $|C_\Omega(P)| = 1$; 特别地, 因 P 在 M 中正规, 得到 $C_\Omega(P) = C_\Omega(M)$.

(c) 根据 (b), 存在 M 不变的 $Q \in \mathrm{Syl}_q N$. 因为 Q 是 N 的真子群, 所以得到 $M < QM < NM \leqslant G$. □

6.6.4 设 M 是一个本原子群, $N \trianglelefteq G$ 且使

$$M \cap F^*(N) \neq 1.$$

那么 $F(G) = 1$ 且 $F^*(N) = F^*(G) = E(G)$. 特别地, G 的每一个极小正规子群都包含在 N 中.

证明 注意到 $F^*(N) \leqslant F^*(G)$. 因此 6.6.1 蕴含了

$$Z(F(G)) \leqslant C_G(F^*(N)) = 1.$$

于是由 80 页 5.1.5 得到 $F(G) = 1$. 特别地, $F^*(N) = E(N)$ 且

$$F^*(G) \overset{6.5.7}{=} C_{F^*(G)}(E(N))E(N).$$

于是再次运用 6.6.1 得到 $F^*(G) = E(N) = F^*(N)$. □

下设 M 是 G 的本原极大子群. 那么

$$G = F^*(G)M.$$

本节的其余部分研究这个分解. 结果将收集在 O'Nan-Scott 定理中.

分 3 种情形:

(F1) $F(G) = F^*(G)$, $F(G)$ 是 G 的唯一极小正规子群①, 且 M 是 $F(G)$ 在 G 中的一个补.

(F2) G 恰包含两个极小正规子群 N_1 和 N_2. 这些正规子群都是非交换的, 即

$$F^*(G) = N_1 \times N_2 = E(G).$$

① 于是 $F(G)$ 是初等交换的.

(F3) $F^*(G)$ 是 G 的非交换极小正规子群.

6.6.5　假设 G 包含一个本原极大子群 M. 那么 (F1), (F2) 或 (F3) 中至少有一种情形成立.

证明　设 N_1 是 G 的极小正规子群. 那么

($'$) $G = N_1M$.

从 6.6.1 得到 $C_G(N_1) \cap M = 1$. 如果 N_1 是交换的, 那么 ($'$) 蕴含了 $N_1 = C_G(N_1)$, 于是 $N_1 = Z(F^*(G))$. 由此得到 $N_1 = F^*(G)$. 因此, 由 6.6.2 得到 M 是 N_1 的补而有 (F1) 成立.

现在可假设 G 没有交换的极小正规子群. 那么 $F(G) = 1$ 且 $E(G)$ 是 G 的极小正规子群的积 (见 6.5.5(b)). 如果 N_1 是 G 的唯一的极小正规子群, 那么 (F3) 成立.

假设有另一个极小正规子群 N_2. 那么

$$N := N_1N_2 = N_1 \times N_2,$$

且由 ($'$) 得 $N \cap M \neq 1$. 因为 $N = F^*(N)$, 由 6.6.4 得到 $E(G) = N$. 因此, N_1 和 N_2 是 G 仅有的极小正规子群 (见 23 页 1.6.3(b)), 从而 (F2) 成立. □

分别讨论 (F1), (F2) 以及 (F3) 这 3 种情形.

6.6.6　假设 (F1) 成立. 设 $p \in \pi(M)$ 使 $O_p(M) \neq 1$. 那么 G 的所有本原极大子群共轭①.

证明　设 $P := O_p(M)$ 且 $F := F^*(G)$. 那么

$$M = N_G(P) \text{ 且 } FP \trianglelefteq G,$$

且由 6.6.3(a) 得到

$$\mathrm{Syl}_p M \subseteq \mathrm{Syl}_p G.$$

设 H 是 G 的另一个本原极大子群, 那么 H 也是 F 的补. 特别地, $|H| = |M|$. 根据 Sylow 定理, 存在 $g \in G$ 使 $P \leqslant H^g$. 这蕴含了

$$P = H^g \cap FP \trianglelefteq H^g,$$

于是 $H^g = N_G(P) = M$. □

6.6.7　假设 (F2) 成立. 那么存在 M 同构 $\alpha : N_1 \to N_2$, 使

$$M \cap F^*(G) = \{xx^\alpha | x \in N_1\}^{②}.$$

---

① 特别地, 当 G 可解时成立.

② 于是 $M \cap F^*(G)$ 是 $N_1 \times N_2$ 的一个"对角线".

证明 设 $D := M \cap F^*(G)$. 那么 6.6.1 蕴含

$$D \cap N_1 = 1 = D \cap N_2.$$

因为 $G = N_iM$, 得到 $F^*(G) = N_iD$. 因此, 对每一个 $x_1 \in N_1$ 都存在唯一的 $x_2 \in N_2$ 使 $x_1x_2 \in D$, 且映射

$$\alpha : N_1 \to N_2, \ x_1 \mapsto x_2$$

是一个同构.

并且因为 N_1, N_2 和 D 是 M 不变的, 所以这个同构与由 M 的元素诱导的共轭可交换. □

现在从下面的评注开始讨论情形 (F3)(对照 1.7.1(b)):

6.6.8 设 F 是 G 的极小正规子群, M 是 G 的一个使 $G = FM$ 的真子群.

(a) 假设 U 是 F 的 M 不变真子群, 那么 UM 是 G 的真子群.

(b) M 是 G 的极大子群当且仅当 $F \cap M$ 是 F 的唯一的极大 M 不变子群.

证明 从 (a) 可得到 (b). 对于 (a) 的证明, 用由假设 $G = UM$ 而导出矛盾的方法来证明. 于是 U 在 G 中正规, 从而 F 不是 G 的极小正规子群, 得到矛盾. □

在情形 (F3), $F^*(G)$ 是 G 的非交换极小正规子群. 研究下面的情况:

$\mathcal{F}$ F 是 G 的非交换极小正规子群;

M 是 G 的使 $G = FM$ 的极大子群;

K 是 F 的分支;

$M_0 := N_M(K)$;

$G_0 := KM_0$;

$\overline{G_0} := G_0/C_{G_0}(K)$.

那么 K 是非交换单群且 F 是 K 的共轭的直积. 事实上, 因为 $G = FM$, 所以这些共轭在 M 下已经共轭. 因为 $F \not\leqslant M$, 这证明了 $K \not\leqslant M$.

注意到 $\overline{K}$ ($\leqslant \overline{G_0}$) 同构于 K, 从而是

$$\overline{G_0} = \overline{K}\,\overline{M_0}$$

的极小正规子群.

6.6.9 假设 $\mathcal{F}$ 成立.

(a) M_0 是 G_0 的极大子群.

(b) 设 $\overline{M_0} \neq \overline{G_0}$, 那么 $\overline{M_0}$ 是 $\overline{G_0}$ 的一个本原极大子群.

(c) $\overline{M_0} \cap \overline{K} \in \{\overline{M \cap K}, \overline{K}\}$.

证明 (a) 运用 6.6.8(b) 到 G_0 和 M_0 上 (用 K 代替 F). 那么只要证明 K 的每一个 M_0 不变真子群 V 包含在 $K \cap M_0$ 中就行了.

设 $U := \langle V^M \rangle$. 那么有 $UM = M$ 或 $UM = G$. 在第 1 种情形, 有 $V \leqslant K \cap M_0$. 而在第 2 种情形, 将如下导出矛盾. 注意到现在 U 在 G 中正规. 由 F 的极小性, 得到 $F = U$. 另一方面, 对每一个 $x \in M \backslash M_0$ 有 $V^x \leqslant K^x \neq K$. 由此得到 $U = VC_F(K) = F$ (见 6.5.3) 和 $V \trianglelefteq F$. 于是 $V = K$, 矛盾.

(b) 因为 $\overline{M_0} \neq \overline{G_0}$, 所以从 (a) 得到 $\overline{M_0}$ 的极大性. 为了证明 $\overline{M_0}$ 的本原性, 设 $N \leqslant M_0$ 使 $\overline{N} \trianglelefteq \overline{G_0}$. 那么因 $\overline{K} \nleqslant \overline{M_0}$ 有 $[\overline{N}, \overline{K}] = 1$. 因为映射

$$K \to \overline{K}, \text{其中}, x \mapsto \overline{x}$$

是 N 同构, 得到 $N \leqslant C_{G_0}(K)$, 于是 $\overline{N} = 1$.

(c) 设 $V := \{x \in K | \overline{x} \in \overline{M_0} \cap \overline{K}\}$. 那么 $\overline{V} = \overline{M_0} \cap \overline{K}$ 且 V 是 K 的一个包含 $M_0 \cap K$ 的 M_0 不变子群. 于是从 (a) 和 6.6.8 得到结论. □

6.6.10　假设 $\mathcal{F}$ 成立.

(a) 如果 $K \cap M \neq 1$, 那么 $\overline{M_0}$ 是 $\overline{G_0}$ 的本原极大子群.

(b) 如果 $K \cap M = 1$, 那么 (b1) 或 (b2) 成立:

(b1) $\overline{K} \leqslant \overline{M_0} = \overline{G_0}$.

(b2) $\overline{M_0} \cap \overline{K} = 1$ 且 $\overline{M_0}$ 是 $\overline{G_0}$ 的本原极大子群.

证明　(a) 如果 $\overline{M_0} \neq \overline{G_0}$, 从 6.6.9(b) 可得到结论. 假设 $\overline{M_0} = \overline{G_0}$, 那么 $\overline{K} \leqslant \overline{M_0}$, $M \cap K = M_0 \cap K$ 是 K 不变的. 这和 K 的单性矛盾.

(b) 这从 6.6.9(c) 和 (b) 可得到. □

下面的猜想可用单群分类定理证明.

Schreier 猜想　设 E 是一个单群. 那么 $\mathrm{Aut}\, E/\mathrm{Inn}\, E$ 可解.

由这个猜想, 能够证明 6.6.10 中的情形 (b2) 不会出现.

根据 48 页 3.1.9, $\overline{G_0}$ 等同于 Aut　K 的一个使 $\overline{K}$ =Inn K 的子群. 那么有

$$\overline{G_0}/\overline{K} \leqslant \mathrm{Aut}\, K/\mathrm{Inn}\, K.$$

由此得到 $\overline{G_0}/\overline{K}$ 从而 $\overline{M_0} \cong \overline{K}\,\overline{M_0}/\overline{K}$ 也是可解的. 又因 K 是非交换单群得 $|\pi(\overline{K})| \geqslant 2$. 因此由 6.6.3(c) 得到 $\overline{M_0}$ 非极大, 这和 (b2) 矛盾.

用 $\mathcal{K}(X)$ 记作 X 的分支的集合. 设 F 如同 $\mathcal{F}$ 中所规定的, N 是 F 的正规子群. 那么 (见 1.7.5) 有

$$N = \mathop{\times}_{E \in \mathcal{K}(N)} E, \quad F = N \times \left(\mathop{\times}_{E \in \mathcal{K}(F) \backslash \mathcal{K}(N)} E \right).$$

对 $E \in \mathcal{K}(F)$, 设

$$\pi_E : F \to E$$

是 F 到 E 上的射影 (用 $\pi_E(x)$ 表示 $x \in F$ 的象).

6.6.11 假设 $\mathcal{F}$ 成立, 且

$$1 = K \cap M \neq F \cap M.$$

那么存在 F 的正规子群 $N_1, \cdots, N_r$ 使下面结论成立:

(a) $F = N_1 \times \cdots \times N_r$ 且 M 传递地作用在 $\{N_1, \cdots, N_r\}$ 上.

(b) $F \cap M = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{r} (N_i \cap M)$.

(c) 对每一个 $E \in \mathcal{K}(N_i)$, 映射

$$N_i \cap M \to E, \text{其中}, x \mapsto \pi_E(x)$$

是一个 $N_M(E)$ 同构 $(i = 1, \cdots, r)$①.

(d) $\overline{M}_0 = \overline{G}_0$.

证明 设 $D := F \cap M$ 且

$$F_0 := \mathop{\times}\limits_{E \in \mathcal{K}(F)} \pi_E(D).$$

因 $D \neq 1$ 得 $F_0 \neq 1$. 又因为 $K \cap M = 1$ 得到 $F_0 \not\leq M$, 且 F 的所有分支在 M 下共轭. 因此由 6.6.8(b) 得到 $F_0 = F$. 于是有

(1) $\pi_E(D) = E, \forall E \in \mathcal{K}(F)$.

选取 $a \in D^{\#}$ 使得 $\pi_E(a) \neq 1$ 的 $\mathcal{K}(F)$ 中的分支 E 的个数为最小, 设 N 是这些分支的积, 即

$$\mathcal{K}(N) = \{E \in \mathcal{K}(F) | \pi_E(a) \neq 1\}.$$

令

$$C := D \cap N,$$

注意到 $a \in C^{\#}$ 且 $C \trianglelefteq D$. 那么, 对 $E \in \mathcal{K}(N)$ 有 $1 \neq \pi_E(C) \trianglelefteq \pi_E(D)$. 现在, 由 E 的单性和 (1) 得到 $\pi_E(C) = E$. 由 a 的最小选择得映射 $\pi_E|_C$ 是单射. 因此得到

(2) 对每一个 $E \in \mathcal{K}(N)$, 映射

$$C \to E, \text{其中}, x \mapsto \pi_E(x)$$

是一个 D 同构. 从 $C^D = C$ 和 $E^D = E$ 知这个同构和 D 的作用可交换.

现在证明

(3) 设 $d \in D$ 且 $c \in C$ 使得

$$\text{对某个 } E_0 \in \mathcal{K}(N) \text{ 有 } \pi_{E_0}(d) = \pi_{E_0}(c).$$

---

① 于是 $N_i \cap M$ 是直积 $N_i = \mathop{\times}\limits_{E \in \mathcal{K}(N_i)} E$ 的对角线.

那么 $[N, dc^{-1}] = 1$.

为证明 (3), 设 $x \in C$. 由 (2) 得

$$\pi_{E_0}(x^d) = \pi_{E_0}(x)^d = \pi_{E_0}(x)^{\pi_{E_0}(d)} = \pi_{E_0}(x)^{\pi_{E_0}(c)} = \pi_{E_0}(x^c),$$

而因 $\pi_{E_0}|_C$ 是单射, 有 $x^d = x^c$; 特别地, $[C, f] = 1$, 其中, $f := dc^{-1}$. 由此得到对所有的 $E \in \mathcal{K}(N)$ 有

$$1 = \pi_E([C, f]) = [\pi_E(C), \pi_E(f)] \overset{(2)}{=} [E, \pi_E(f)],$$

于是因 $Z(E) = 1$ 有 $\pi_E(f) = 1$. 这蕴含了 (3). 当然, 用 N^m $(m \in M)$ 代替 N 可得 (2) 和 (3) 也成立.

设 $E_0 \in \mathcal{K}(N) \cap \mathcal{K}(N^m)$ 且 $d := a^m$. 由 (2), 存在 $c \in C$ 使 $\pi_{E_0}(c) = \pi_{E_0}(d)$. 因此把 (3) 应用到 N 和 N^m 上, 得到 $[NN^m, dc^{-1}] = 1$. 连同 $dc^{-1} \in NN^m$ 一起, 得到 $d = c \in N \cap N^m$, 从而由 a 的极小性得出 $N = N^m$. 于是证明了

(4) 对 $m \in M$, 有 $N \cap N^m = 1$ 或 $N = N^m$. 特别 $N_M(E) \leqslant N_M(N)$, $\forall E \in \mathcal{K}(N)$.

(4) 的第 2 部分蕴含了: 对所有的 $E \in \mathcal{K}(N)$, (2) 中的映射是一个 $N_M(E)$ 同构. 据此, 从 (2) 和 (4) 得到 (a) 和 (c) 成立, 其中, N_i 是 N 的共轭. 并且由 (3) 首先得

$$D = (D \cap N) \times C_D(N),$$

重复应用 (3) 得到

$$D = \mathop{\times}_{m \in M} (N^m \cap D).$$

这就证明了 (b). 最后, 由 (c) 得到 (d). □

由结论 6.6.5~6.6.11 得出

6.6.12　O'Nan-Scott 定理[①]　设 M 是 G 的本原极大子群. 那么下面之一成立:

(a) $F^*(G) = F(G)$ 且 $F(G)$ 是 G 唯一的极小正规子群.

(b) $F(G) = 1$ 且 $F^*(G) = N_1 \times N_2$, 这里 N_1 和 N_2 是 G 仅有的极小正规子群, 且存在同构 $\alpha : N_1 \to N_2$ 使 $F^*(G) \cap M = \{xx^\alpha | x \in N_1\}$.

(c) $F(G) = 1$ 且 $F^*(G)$ 是 G 唯一的极小正规子群, 并且下面之一成立, 其中, 符号同 $\mathcal{F}$ 中的符号:

(c1) $\overline{M}_0$ 是 $\overline{G}_0$ 的本原极大子群 (且 $K \cap M \neq 1$)[②].

(c2) $\overline{M}_0 = \overline{G}_0$ 且 $M \cap F = 1$.

---

① 见文献 [81] 和 [35].

② 如果运用 Schreier 猜想就会得到 $K \cap M \neq 1$.

(c3) $\overline{M}_0 = \overline{G}_0$, $1 = K \cap M \neq F \cap M$, 其中, F 同 6.6.11 中所述.

现在对 O'Nan-Scott 定理中出现的每一种情形都给出一个例子.

情形 (a). $G = S_3$ 且 $M = S_2$ ($\leqslant G$), 或 $G = S_4$ 且 $M = S_3$ ($\leqslant G$). 一般地, 对每一个可解群 G, 只要 $\Phi(G) = 1$ 且 G 恰好包含一个极小正规子群 (a) 就会成立.

在其余的情形中, $F^*(G)$ 是 G 的分支的直积. 对于情形 (b), (c1) 和 (c3), 设

$$K \cong A_5, \quad H := K \times K$$

且 $t \in \operatorname{Aut} H$ 使

$$(k_1, k_2)^t = (k_2, k_1), \quad \forall (k_1, k_2) \in H.$$

用这些数据构造一个使 $F^*(G) = H$ 的群 G(和一个本原极大子群 M).

情形 (b). $G := H$ 且 $M := \{(k, k) | k \in K\}$.

情形 (c1). $G = \langle t \rangle H$ 是 H 和 $\langle t \rangle$ 的半直积且 M_1 是 K 的极大子群. 设 $M_2 := \{(k_1, k_2) | k_1, k_2 \in M_1\}$ 且 $M := M_2 \langle t \rangle$.

情形 (c3). G 同 (c1) 的例子中的群, 但 $M_2 := \{(k, k) | k \in K\}$ 且 $M := M_2 \langle t \rangle$.

情形 (c2). 在交错群 $M := A_6$ 中, 稳定子

$$M_0 := \{x \in A_6 | 6^x = 6\}$$

是同构于 A_5 的子群. 设 G 是扭圈积

$$(A_5, M, M_0, \tau),$$

其中, $\tau : M_0 \to \operatorname{Aut} A_5$ 表示共轭作用, 即 $\operatorname{Im} \tau = \operatorname{Inn} A_5$ (见 4.4 节). 那么 G 是正规子群

$$\widehat{A}_5 = A_5 \times A_5 \times A_5 \times A_5 \times A_5 \times A_5$$

和 M 的半直积, 且 $F^*(G) = \widehat{A}_5$. 又因 A_6 是单群得 M 是本原的, 且因 M_0 同 $\operatorname{Inn} A_5$ 那样作用在 $\widehat{A}_5$ 的第一个分支 $K \cong A_5$ 上, 得到 1 和 K 是 K 仅有的 M_0 不变子群. 于是由 6.6.8 得到 M 是 G 的极大子群 (可比较 6.6.9(a) 的证明).

习 题

设 G 是一个可解群.

1. 设 U 是一个本原群且 N 是 G 的极小正规子群. 设 $\overline{G} := G/N$. 那么 $\overline{U} = \overline{G}$ 或 $\overline{U}$ 是 $\overline{G}$ 的本原子群.

2. U_1 和 U_2 是 G 的本原子群且满足 $|U_1| \leqslant |U_2|$. 那么 U_1 和 U_2 的一个子群共轭.

6.7 次正规子群

在本章最后的这一节中, 给出 Wielandt 的两个关于次正规子群的定理. 特别地, 推论 6.7.6 (Baer 定理) 是一个常用的结果.

6.7.1 定理(Wielandt, [98]) 设 G 是一个群, A 和 B 是 G 的次正规子群. 那么 $\langle A, B\rangle$ 也是 G 的次正规子群.

证明 设 G 是一个极小反例①, $\mathcal{S}$ 是 G 的所有次正规子群的集合. 那么存在 $A, B \in \mathcal{S}$ 使 $\langle A, B\rangle \notin \mathcal{S}$. 固定 B 且选取 $A \in \mathcal{S}$ 是使 $\langle A, B\rangle \notin \mathcal{S}$ 的极大元素. 由此得到

(1) 如果 $A < X \in \mathcal{S}$, 那么 $\langle X, B\rangle \in \mathcal{S}$.

如果 $A \trianglelefteq G$, 那么由 12 页 1.2.8 得到 $AB/A \trianglelefteq\trianglelefteq G/A$, 于是 $\langle A, B\rangle = AB \in \mathcal{S}$. 因此

(2) A 在 G 中不正规.

因为 $A \in \mathcal{S}$, 所以存在 G 的子群 X 和 G_1 使

(3) $A \trianglelefteq X \trianglelefteq\trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G$ 且 $A \neq X$, $G_1 \neq G$.

因为 G_1 在 G 中正规, 所以对每一个 $b \in B$ 显然有 $A^b \trianglelefteq\trianglelefteq G_1$. 由 G 的极小性得

$$A \leqslant \langle A^B\rangle \trianglelefteq\trianglelefteq G_1.$$

特别地, $\langle A^B\rangle \in \mathcal{S}$. 如果 $A < \langle A^B\rangle$, 那么 (1) 蕴含了

$$\langle A, B\rangle = \langle\langle A^B\rangle, B\rangle \trianglelefteq\trianglelefteq G,$$

与假设矛盾. 于是有 $\langle A^B\rangle = A$, 即

$$B \leqslant N_G(A).$$

再由 (1) 得

$$G_2 := \langle X, B\rangle \trianglelefteq\trianglelefteq G.$$

如果 $G_2 \neq G$, 那么同上由 G 的极小性得到 $\langle A, B\rangle \trianglelefteq\trianglelefteq G_2$, 从而 $\langle A, B\rangle \in \mathcal{S}$. 于是得到

$$G = G_2 = \langle X, B\rangle \leqslant N_G(A),$$

这和 (2) 矛盾. □

下面的引理给出了次正规子群的一个典型的性质 (对照 3.2.6):

---

① 这意味着: 假设定理不成立, 那么存在群 G 满足定理的假设, 但定理的结论不成立. 在这些群中选取 G 使得 $|G|$ 为最小.

6.7.2 设 Σ 是群 G 的的次正规子群的集合, 且满足 $\Sigma^G = \Sigma$, Σ_0 是 Σ 的一个真子集. 那么存在 $X \in \Sigma \backslash \Sigma_0$ 使 $\langle \Sigma_0 \rangle^X = \langle \Sigma_0 \rangle$.

证明 由 6.7.1, $\langle \Sigma_0 \rangle$ 在 G 中次正规. 由于可假设 $\langle \Sigma_0 \rangle \neq G$, 则 G 中存在一个包含 $\langle \Sigma_0 \rangle$ 的真正规子群 G_1. 因此如果

$$\Sigma_1 := \{U \in \Sigma | U \leqslant G_1\} \neq \Sigma_0,$$

对 $|G|$ 用归纳法, 应用到 G_1 上便可得到结论. 假定 $\Sigma_0 = \Sigma_1$. 因为 $G_1^G = G_1$ 且 $\Sigma^G = \Sigma$, 显然有 $(\Sigma_1)^G = \Sigma_1$. 因此 $\langle \Sigma_0 \rangle = \langle \Sigma_1 \rangle$ 在 G 中次正规. □

下面定理的证明核心是证某子群集合包含唯一的极大元素[①]. 像这样的唯一性结果在有限群的研究中是经常要使用的. 这里[②] 所用的唯一性结果在第 12 章中也会用到, 分别把它列出来:

6.7.3 设 A 是 G 的子群, $\mathcal{U}$ 是 G 的子群的非空集合. 对 $U \in \mathcal{U}$, 令

$$\Sigma_U := \{A^g | g \in G,\ A^g \trianglelefteq \trianglelefteq U\}.$$

假设对所有的 $U, \widetilde{U} \in \mathcal{U}$ 有

(1) $A \in \Sigma_U$.

(2) $\{B \in \Sigma_{\widetilde{U}} | B \leqslant U\} \subseteq \Sigma_U$.

(3) 存在 $\widehat{U} \in \mathcal{U}$ 使 $N_G(\langle \Sigma_U \cap \Sigma_{\widetilde{U}} \rangle) \leqslant \widehat{U}$.

那么 $\mathcal{U}$ 包含唯一的极大元素.

证明 设

$$\Sigma := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \Sigma_U.$$

从 (2) 得到

$$\Sigma_U = \{B \in \Sigma | B \leqslant U\}, \quad U \in \mathcal{U}.$$

通过反证法证明结论, 假设 $\mathcal{U}$ 中存在两个不同的极大元素 U_1 和 U_2. 另外, 选取这些极大元素使

$$\Sigma_0 := \Sigma_{U_1} \cap \Sigma_{U_2}$$

是极大的. 根据 (3), $N_G(\langle \Sigma_0 \rangle)$ 包含在 $\mathcal{U}$ 的一个极大元素 U_3 中. Σ_{U_i} 的定义表明了 $\langle \Sigma_{U_i} \rangle \trianglelefteq U_i$, 由 U_i 的极大性和 (3) 得到

(*) $U_i = N_G(\langle \Sigma_i \rangle),\ i = 1, 2, 3.$

特别地, $\Sigma_{U_1} \neq \Sigma_{U_2}$.

---

① 关于包含关系.

② 根据在证明中所用到的方法, Wielandt 称该结论为链引理; 见文献 [99] 第 586 页.

设 $i \in \{1,2\}$ 使 $\Sigma_{U_0} \subsetneq \Sigma_{U_i}$. 那么, 由 6.7.2 知存在 $X \in \Sigma_{U_i} \setminus \Sigma_{U_0}$ 使 $\langle \Sigma_0 \rangle^X = \langle \Sigma_0 \rangle$. 由此得到 $X \in \Sigma_{U_3}$, 从而有 $\Sigma_0 \subsetneq \Sigma_{U_3} \cap \Sigma_{U_i}$, 由 Σ_0 的极大性选择得到 $U_i = U_3$. 因此, 可选择记号使 $U_2 = U_3$ 且 $U_1 \neq U_3$. 那么 $\Sigma_0 = \Sigma_{U_1}$, 由 (*) 得

$$U_1 = N_G(\langle \Sigma_{U_1} \rangle) \leqslant U_3,$$

即 $U_1 = U_3$, 矛盾. □

6.7.4 定理(Wielandt, [98]) 设 A 是 G 的子群. 假设

$$A \trianglelefteq \trianglelefteq \langle A, A^g \rangle, \quad \forall g \in G.$$

那么 A 在 G 中次正规.

证明 注意到对所有的共轭 A^x, $x \in G$, 定理的假设也成立,

$$A \trianglelefteq \trianglelefteq \langle A, A^{gx^{-1}} \rangle \Rightarrow A^x \trianglelefteq \trianglelefteq \langle A^x, A^g \rangle.$$

对 $|G|$ 用归纳法且假设 A 在 G 中不正规. 设 $\mathcal{U}$ 是包含 A 的 G 的所有真子群的集合; 特别地, 因为 A 在 G 中不正规, 所以 $\langle A, A^g \rangle \in \mathcal{U}, \forall g \in G$. 设 $U \in \mathcal{U}$. 由对 $|G|$ 的归纳, 假定

$$\Sigma_U := \{A^x | A^x \leqslant U, x \in G\}$$

的每一个子群在 U 中正规. 又对 $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_U$ 和 $A \in \Sigma_0$ 有

$$A \trianglelefteq \trianglelefteq \langle \Sigma_0 \rangle.$$

因此 $\langle \Sigma_0 \rangle$ 在 G 中不正规. 由此得到 $N_G(\langle \Sigma_0 \rangle) \in \mathcal{U}$, 从而满足 6.7.3 的假设. 于是 G 中存在极大子群 M 包含 $\langle A, A^g \rangle$, $\forall g \in G$. 因此

$$A \trianglelefteq \trianglelefteq \langle \Sigma_M \rangle \trianglelefteq G,$$

于是 $A \trianglelefteq \trianglelefteq G$, 这和假定矛盾. □

幂零群的每一个子群都是次正规的. 由此得到下面的推论:

6.7.5 设 A 是 G 的子群. 假设对每一个 $g \in G$ 有 $\langle A, A^g \rangle$ 幂零. 那么 $A \trianglelefteq \trianglelefteq G$; 特别有 $A \leqslant F(G)$. □

因为 p 群是幂零的, 得到另一个推论:

6.7.6 Baer 定理 [24] 设 x 是 G 的 p 元素. 假设对每一个 $g \in G$, $\langle x, x^g \rangle$ 都是一个 p 子群. 那么 $x \in O_p(G)$. □

对素数 2 有

6.7.7 设 t 是 G 的一个不在 $O_2(G)$ 中的对合. 那么存在奇阶元素 $y \in G^\#$ 使 $y^t = y^{-1}$.

证明 由 6.7.6, 存在 $g \in G$ 使 $\langle t, t^g \rangle$ 不是 2 子群. 那么由 27 页的 1.6.9 得到 $d := tt^g$ 不是 2 元. 因此存在奇阶元 y 使 $1 \neq y \in \langle d \rangle$, 再由 1.6.9 得 $y^t = y^{-1}$. □

下面的引理类似于 6.7.6, 将在第 10 章和第 11 章中得到应用.

6.7.8 Matsuyama 引理 [80] 设 Z, Y 是 G 的子群且 $p \in \pi(G)$. 假设

$$\langle (Z^g)^Y \rangle \text{ 是一个 } p \text{ 子群}, \quad \forall g \in G^{①}.$$

那么存在 G 的一个 Sylow p 子群 P, 使

$$\langle Z^g | g \in G, Z^g \leqslant P \rangle$$

被 Y 正规化②.

证明 假设 $\mathcal{M}$ 是 G 的所有满足性质

$$Z \leqslant Q, \ Q = \langle Z^g | g \in G, \ Z^g \leqslant Q \rangle.$$

的 Y 不变 p 子群 Q 的集合. 由假设, $\langle Z^Y \rangle$ 包含在 $\mathcal{M}$ 中; 特别地, $\mathcal{M}$ 非空. 设 Q 是 $\mathcal{M}$ 的极大元素且

$$Q \leqslant P \in \mathrm{Syl}_p G.$$

设

$$\Sigma := \{Z^g | g \in G, \ Z^g \leqslant P\}, \quad \Sigma_0 := \{Z^g | g \in G, \ Z^g \leqslant Q\}.$$

那么 $Q = \langle \Sigma_0 \rangle$, 若 $\Sigma_0 = \Sigma$, 则结论得证.

于是, 可假设 $\Sigma_0 \subset \Sigma$. 因为 P 的所有子群在 P 中正规, 可运用 6.7.2. 因此, 存在 $Z^g \in \Sigma \backslash \Sigma_0$ 使 $Z^g \leqslant N_G(Q)$. 那么, 因为 $Q^Y = Q$, 也有 $\langle Z^{gY} \rangle \leqslant N_G(Q)$. 由此得到 $Q\langle Z^{gY} \rangle \in \mathcal{M}$, 这和 Q 的极大选择矛盾. □

习 题

设 G 是群.

1. 设 $H \trianglelefteq \trianglelefteq G$. 那么, 对所有的 $p \in \mathbb{P}$ 和 $S \in \mathrm{Syl}_p G$, 有 $H \cap S \in \mathrm{Syl}_p H$.
2. 设 H 是 G 的可解子群且满足

$$\text{对所有的 } p \in \mathbb{P} \text{ 和 } S \in \mathrm{Syl}_p G, \ \text{有 } H \cap S \in \mathrm{Syl}_p H.$$

那么 H 在 G 中次正规.

设 D 是 G 的 p 元的共轭类, $p \in \mathbb{P}$.

3. 如果 $\langle D \rangle$ 不是一个 p 群, 那么存在 $x, y \in D$ 使 $x \neq y$ 且 x 和 y 在 $\langle x, y \rangle$ 中共轭.
4. 设 $E \subseteq D$ 且 $|E|$ 是满足条件

---

① 这蕴含了 $Z^g \trianglelefteq \trianglelefteq \langle Z^g, Y \rangle$, $\forall g \in G$.

② 在 7.1.9 中, 这个子群记作 $\mathrm{wcl}_G(Z, P)$.

(∗) E 是 $\langle E\rangle$ 的一个共轭类

中极大的. 那么 $\langle E\rangle \trianglelefteq\trianglelefteq G$.

5. 设 $G=\langle D\rangle$, $E\subsetneq D$ 且 $|E|$ 是满足条件

(∗) $E\neq D$ 且 E 是 $\langle E\rangle$ 的一个共轭类

中极大的. 那么所有满足 $E\subseteq U$ 且 $U=\langle U\cap D\rangle$ 的 G 的子群 U 的集合包含唯一的极大元素.

6. (Baumann, [25]) 设对 G 的真子群 $U_1,\cdots,U_r$ 有 $D\subseteq U_1\cup\cdots\cup U_r$ 且 $G=\langle D\rangle$. 那么 $r\geqslant p+1$.

第 7 章　转移与 p 商群

7.1　转 移 同 态

寻求非平凡的真正规子群常常是有限群研究的第一步. 如果群 G 有这样一个正规子群 N, 那么在证明中经常可由归纳法得到关于 N 和 G/N 的信息, 这样就可能得到对 G 所要的结论 (见 6.1.2).

因为正规子群是同态映射的核, 所以为寻找正规子群去构造 G 的同态也是一个办法. 困难的地方是确定这样的一个同态的核是否为 G 的非平凡的真正规子群.

下面, 设 P 是 G 的一个子群. 本章定义了一个从 G 到交换群 P/P' 的同态 τ, 如果 P 是 G 的一个 Sylow p 子群, 那么它的核和像都可以用 p 元素来描述. 这就体现了前面所提到的"群的结构可从它的 p 结构导出"这样一个原理.

如果 G 是非交换的, 那么因为 $G/\mathrm{Ker}\ \tau$ 是交换的, 显然有 $\mathrm{Ker}\ \tau$ 是非平凡的. 因此, 或者 G 包含一个非平凡的真正规子群, 或者 $G = \mathrm{Ker}\ \tau$. 在第 2 种情形, $\mathrm{Ker}\ \tau$ 可由 p 元素在 G 中的共轭所描述, 这将给出关于 G 的结构的信息.

设

$$\overline{P} := P/P'$$

是 P 的换位子商群且

$$P \to \overline{P}, \text{ 其中}, x \mapsto \overline{x}$$

是到交换群 $\overline{P}$ 自然满同态.

设 $\mathcal{S}$ 是子群 P 在群 G 中的代表系的集合. 对 $R, S \in \mathcal{S}$ 设

$$R|S := \prod_{\substack{(r,s)\in R\times S\\ Pr=Ps}} \overline{rs^{-1}} \ (\in \overline{P}).$$

(对照 57 页的定义.) 因为这些因子是交换群 $\overline{P}$ 中的元素, 所以这个积不依赖于它们的排序. 同 3.3 节, 对 $R, S, T \in \mathcal{S}$ 下面的性质成立:

(1) $(R|S)^{-1} = S|R$.

(2) $(R|S)(S|T) = R|T$.

研究 G 在 $\mathcal{S}$ 上的右乘作用

$$S \stackrel{g\in G}{\longmapsto} Sg.$$

那么有

(3) $(Rg|Sg) = R|S$

且

(4) $(Rg|R) = Sg|S$.

对于 (4) 的证明, 注意到有

$$\begin{aligned}(Rg|R)(Sg|S)^{-1} &= (Rg|R)(R|Sg)(R|Sg)^{-1}(Sg|S)^{-1}\\ &= (Rg|R)(R|Sg)((R|Sg)(Sg|S))^{-1}\\ &\overset{(2)}{=} (Rg|Sg)(R|S)^{-1} \overset{(3)}{=} 1.\end{aligned}$$

7.1.1　转移同态　设 $S \in \mathcal{S}$. 映射

$$\tau_{G\to P}: G \to \overline{P}, \text{其中}, g \mapsto Sg|S.$$

是一个不依赖于代表系 $S \in \mathcal{S}$ 的选择的同态.

证明　由 (4) 知论证不依赖 S 的选择. 对 $x, y \in G$ 有

$$Sxy|S \overset{(2)}{=} (Sxy|Sy)(Sy|S) = (Sx)y|Sy)(Sy|S) \overset{(3)}{=} (Sx|S)(Sy|S).$$

因此 $\tau_{G\to P}$ 是一个同态. □

下面对 $x \in G$, 计算转移 $x^{\tau_{G\to P}}$. 为此, 研究 $\langle x\rangle$ 由右乘在集合 $\Omega := \{Pg | g \in G\}$ 上的作用. 设 $\Omega_1, \cdots, \Omega_k$ 是 Ω 的 $\langle x\rangle$ 轨道且 $Pg_i \in \Omega_i$. 那么存在 $o(x)$ 的一个因子 n_i, 使 $\langle x^{n_i}\rangle$ 是 $\langle x\rangle$ 在 Ω_i 上作用的核.

对 $i = 1, \cdots, k$ 有

- $n_i = |\Omega_i|$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = |G:P|$.
- $\Omega_i = \{Pg_i, Pg_ix, \cdots, Pg_ix^{n_i-1}\}$.
- $Pg_ix^{n_i} = Pg_i$, 从而有 $g_ix^{n_i}g_i^{-1} \in P$.

特别地,

$$S := \dot{\bigcup_{i=1,\cdots,k}} \{g_ix^j | j = 0, \cdots, n_i - 1\}$$

是 $\mathcal{S}$ 的一个元素且满足

$$Sx \cap Pg_ix^j = \begin{cases} \{g_ix^j\}, & j = 1, \cdots, n_i - 1, \\ \{g_ix^{n_i}\}, & j = 1. \end{cases}$$

因此有

(5) $x^{\tau_{G\to P}} = \prod_{i=1}^{k} \overline{g_i x^{n_i} g_i^{-1}}$.

令

$$P^* := \langle y^{-1}y^g | y, y^g \in P,\ g \in G\rangle.$$

而 $y^{-1}y^g = [y, g]$, 于是有

$$P' \leqslant P^* \leqslant P \cap G'.$$

用这个记号得

7.1.2 对 $x \in P$, 有 $(x^{\tau_{G\to P}})\overline{P^*} = \overline{x}^{|G:P|}\overline{P^*}$.

证明 对 (5) 中的每一个因子有

$$g_i x^{n_i} g_i^{-1} = x^{n_i}(x^{-n_i} g_i x^{n_i} g_i^{-1}) \in x^{n_i}P^*,$$

从而有

$$x^{\tau_{G\to P}} \equiv \overline{x}^{\sum_i n_i} = \overline{x}^{|G:P|} \pmod{\overline{P^*}}.$$

□

现在设 π 是一个非空素数集合, 且 P 是 G 的 Hall π 子群. 那么 $PG'/G' = O_\pi(G/G')$, 且由 36 页 2.1.6 得

$$G/G' = PG'/G' \times O_{\pi'}(G/G').$$

记 $G'(\pi)$ 为 $O_{\pi'}(G/G')$ 在 G 中的逆像. 那么 $G'(\pi)$ 是 G 的使 G 有交换 π 商群的最小正规子群①. 因为 $G = PG'(\pi)$, 得

(6) $P \cap G'(\pi) = P \cap G'$ 且 $P \cap G' \cong G/G'(\pi)$.

7.1.3 定理 设 P 是 G 的 Hall π 子群. 那么

$$P^* = P \cap G'(\pi) = P \cap G' \text{ 且 } P/P^* \cong G/G'(\pi).$$

更确切的有 $\mathrm{Ker}\,\tau_{G\to P} = G'(\pi)$ 且 $\overline{P} = \overline{P^*} \times \mathrm{Im}\,\tau_{G\to P}$.

证明 设 $\tau := \tau_{G\to P}$. 因为 P 是 Hall π 子群则有 $(|P|, |G:P|) = 1$. 因此 7.1.2 蕴含了对所有的 $x \in P$ 有

$$\langle x^\tau \overline{P^*}\rangle = \langle \overline{x}\rangle\overline{P^*}$$

(见 1.4.3(b)). 由此得到 $\overline{P \cap \mathrm{Ker}\,\tau} \leqslant \overline{P^*}$, 从而由 $p' \leqslant p^*$ 有

$$P \cap \mathrm{Ker}\,\tau \leqslant P^*, \quad 和 \quad \overline{P} = \overline{P^*}\mathrm{Im}\tau.$$

① 用 6.3 节中的术语有 $G'(\pi) = O^{\mathcal{K}}(G)$, 其中, $\mathcal{K}$ 是交换 π 群群类.

反过来, 因 τ 是一个到交换 π 群 $\overline{P}$ 中的同态得 $G'(\pi) \leqslant \mathrm{Ker}\,\tau$. 由此得到

$$P^* \leqslant P \cap G' \overset{(6)}{=} P \cap G'(\pi) \leqslant P \cap \mathrm{Ker}\,\tau,$$

于是有 $P^* = P \cap \mathrm{Ker}\,\tau = P \cap G'(\pi) = P \cap G'$. 因此得

$$|G/G'(\pi)| \geqslant |G/\mathrm{Ker}\,\tau| = |\mathrm{Im}\,\tau| \geqslant |P/P^*| = |P/P \cap G'| \overset{(6)}{=} |G/G'(\pi)|.$$

这蕴含了 $\mathrm{Ker}\,\tau = G'(\pi)$ 且 $|\mathrm{Im}\,\tau| = |P/P^*|$. 又因为 $\overline{P} = \overline{P^*}\mathrm{Im}\,\tau$, 因此 $\overline{P} = \overline{P^*} \times \mathrm{Im}\,\tau$. □

作为推论, 有

7.1.4 设 P 是 G 的 Hall π 子群且 $P \neq P^*$, 则 $G \neq O^\pi(G)$. □

7.1.3 和 7.1.4 的重要性主要在于: 如果知道了 P 的哪些元素在 G 中共轭, 那么就可以在 P 中计算子群 $P \cap G'$①. 对 $\pi = \{p\}$—— 根据 Alperin 融合 (Fusion) 定理 [20]—— 这个共轭出现在某个非平凡 p 子群的正规化子中. 这个结果的一种很特殊的情形很早就知道, 即

7.1.5 Burnside 引理([4], 155 页) 设 P 是 G 的 Sylow p 子群, A_1 和 A_2 是 P 的正规子集②. 如果 A_1 和 A_2 在 G 中共轭, 那么它们在 $N_G(P)$ 中共轭.

证明 设 $g \in G$ 使 $A_1^g = A_2$. 于是 $P \leqslant N_G(A_1)$ 蕴含了 $P^g \leqslant N_G(A_1^g) = N_G(A_2)$. 因此, P 和 P^g 是 $N_G(A_2)$ 的两个 Sylow p 子群; 特别地, 它们在 $N_G(A_2)$ 中共轭. 设 $z \in N_G(A_2)$ 使 $P^{gz} = P$. 那么 $y := gz \in N_G(P)$, $A_1{}^y = A_2$. □

如果 P 是一个交换 Sylow p 子群, 那么 7.1.5 能应用到 P 的所有子集上; 特别有

$$x,\ x^g \in P,\ g \in G \Rightarrow \text{存在某个 } y \in N_G(P) \text{ 使 } x^g = x^y.$$

这蕴含了 $P^* = \{x^{-1}x^y | y \in N_G(P),\ x \in P\}$, 从而由 7.1.3 得到

7.1.6 定理 设 P 是 G 的交换 Sylow p 子群且 $H := N_G(P)$, 则 $P \cap G' = P \cap H'$ 且

$$P/P \cap H' \cong G/G'(p) \cong H/H'(p).$$

□

设 Z 和 P 是 G 的子群, $Z \leqslant P$. 如果

$$Z^g \leqslant P,\ g \in G \Rightarrow Z^g = Z,$$

则称 Z(关于 G) 在 P 中弱闭(weakly closed).

---

① 这叫做 P 在 G 中的焦子群.

② 就是说, $A_i = A_i^x$, $\forall x \in P$.

7.1.7 设 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $Z \leqslant Z(P)$ 且 Z 在 P 中弱闭. 假设有 $y \in P$ 和 $g \in G$ 使 $y^g \in P$. 那么存在 $g' \in N_G(Z)$ 使 $y^g = y^{g'}$.

证明 注意到 $y^g \in P \cap P^g$, 从而有 $\langle Z, Z^g \rangle \leqslant C_G(y^g)$. 由 Sylow 定理知, 存在 $c \in C_G(y^g)$ 使得 $\langle Z^g, Z^c \rangle$ 是 p 群. 再次用 Sylow 定理得到, 存在某个 $h \in G$ 使

$$\langle Z^{gh}, Z^{ch} \rangle = \langle Z^g, Z^c \rangle^h \leqslant P.$$

因为 Z 在 P 中弱闭, 所以 $Z^{gh} = Z^{ch} = Z$, 从而有

$$g' := gc^{-1} \in N_G(Z).$$

于是由 $c \in C_G(y^g)$ 得 $y^{g'} = y^g$. □

利用 7.1.3, 从 7.1.7 得到下述结论:

7.1.8 Grün (格吕恩) 定理 [62] 设 P 是 G 的 Sylow p 子群, $Z \leqslant Z(P)$ 且 Z 在 P 中弱闭. 令 $H := N_G(Z)$. 那么 $P \cap G' = P \cap H'$ 且

$$P/P \cap G' \cong G/G'(p) \cong H/H'(p).$$

特别地,

$$G \neq O^p(G) \Leftrightarrow H \neq O^p(H). \qquad \square$$

用一个关于弱闭子群的基本评注来结束本节:

7.1.9 设 P 是 G 的 Sylow p 子群, Z 是 P 的在 $N_G(P)$ 中正规的子群. 那么下面的两个结论等价:

(i) Z 关于 G 在 P 中弱闭.

(ii) $Z \leqslant R \in \mathrm{Syl}_p G \Rightarrow Z \trianglelefteq R$.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 如果 $Z \leqslant R = P^{g^{-1}}$, $g \in G$, 那么 $Z^g \leqslant P$, 从而 $Z^g = Z$. 因此 $Z^R = Z^{P^{g^{-1}}} = Z$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 设 $Z^g \leqslant P$. 因为对 Z 的所有共轭 (ii) 也成立, 得 $Z^g \trianglelefteq P$. 由 7.1.5 知, 存在 $y \in N_G(P)$ 使 $Z^y = Z^g$, 于是由假设得到 $Z^g = Z^y = Z$. □

设 Z 和 P 是 G 的子群, $Z \leqslant P$. 子群

$$\mathrm{wcl}_G(Z, P) := \langle Z^g \mid g \in G,\ Z^g \in P \rangle$$

叫做 Z 在 P 中 (关于 G) 的**弱闭包**(weak closure)①.

显然弱闭包 $\mathrm{wcl}_G(Z, P)$ 在 $N_G(P)$ 中正规且在 P 中弱闭. 特别地, 得到一个类似于 7.1.9(ii) 的结果:

$$\mathrm{wcl}_G(Z, P) \leqslant R \in \mathrm{Syl}_p G \Rightarrow \mathrm{wcl}_G(Z, P) = \mathrm{wcl}_G(Z, R).$$

① 对照 6.7.8.

7.2　正规 p 补

G 的一个正规子群 N 叫做 G 的**正规 p 补**(normal p-complement), 如果 G 是 N 和 G 的一个 Sylow p 子群的半直积. 这等价于

$$O_{p'}(G) = N = O^p(G).$$

换句话说, 正规 p 补的存在性等价于 G 是 p' 闭的. 如同在 6.3 节中所知, 具有正规 p 补的群的子群和商群也有正规 p 补.

从 7.1.6, 得到

7.2.1　定理(Burnside([4], 327 页))　设 P 是 G 的 Sylow p 子群. 假设 $N_G(P) = C_G(P)$, 那么 G 有正规 p 补.

证明　设 $H = N_G(P)$. 那么 $P \leqslant Z(H)$, 所以 P 是交换的. 由 58 页 3.3.1, 存在 P 在 H 中的补 A. 于是由 $P \leqslant Z(H)$ 得到 $H = P \times A$, 从而 $H' \cap P = 1$. 再用 7.1.6, 得到结论. □

如果 7.2.1 中的 P 是循环的且 p 是 $|G|$ 的最小素因子, 那么由 3.1.9 和 2.2.5(a) 得到 $N_G(P) = C_G(P)$. 由此有以下的推论:

7.2.2　假设 G 的 Sylow p 子群循环, 其中, p 是 $|G|$ 的最小素因子. 那么 G 有正规 p 补. □

下面的结论将在下一个定理的证明中用到.

7.2.3　设 G 是正规子群 N 和子群 P 的半直积. 又设 Z 是 P 的一个子群且有 $g \in G$ 使 $Z^g \leqslant P$. 那么存在 $x \in P$ 使 $Z^g = Z^x$. 特别地, P 的每一个正规子群在 P 中弱闭.

证明　因为 $G = NP$, 所以元素 g 可写成 $g = yx$, 其中, $y \in N$, $x \in P$. 于是 $Z^g \leqslant P$ 蕴含了 $Z^y \leqslant P$. 这表明了对所有的 $z \in Z$ 有

$$[z, y] = z^{-1}y^{-1}zy \in N \cap P = 1,$$

从而有 $y \in C_G(Z)$, 得 $Z^g = Z^x$. □

7.2.4　Frobenius 正规 p 补定理 [47]　设 P 是 G 的 Sylow p 子群. 假设对 P 的每一个非平凡的 p 子群 U, $N_G(U)$ 有正规 p 补. 那么 G 也有正规 p 补.

证明　显然, 如果 $P = 1$, 那么 G 有正规 p 补. 于是可假设 $P \neq 1$. 从而有

$$Z := Z(P) \neq 1.$$

由假设得 $H := N_G(Z)$ 有正规 p 补; 特别地, $O^p(H) \neq H$. 下证:

(′) Z 在 P 中弱闭.

用 (′) 和 Grün 定理便可以得到 $O^p(G) \neq G$. 因为条件是子群遗传的, 所以对 $|G|$ 用归纳法可假定 $O^p(G)$ 有正规 p 补 K. 那么 $K \trianglelefteq G$ 且 G/K 是一个 p 群. 因此 K 也是 G 的正规 p 补.

为证明 (′), 只要证明蕴含关系

$$Z \leqslant R \in \mathrm{Syl}_p G \Rightarrow Z \trianglelefteq R$$

即可 (见 7.1.9). 因此, 假设存在 $R \in \mathrm{Syl}_p G$ 使 $Z \leqslant R$ 且 $Z \ntrianglelefteq R$. 另外, 选择 R 使

$$S := N_R(Z)$$

是极大的. 设 $S \leqslant T \in \mathrm{Syl}_p N_G(Z)$. 因为 $S < R$ 且 $T \in \mathrm{Syl}_p G$, 有 $S < T$. 于是由 3.1.10 得到

$$S < N_R(S) \text{ 且 } S < N_T(S).$$

设 $M := N_G(S)$ 且 $N_T(S) \leqslant T_1 \in \mathrm{Syl}_p M$. 那么由 S 的极大性知 Z 在 T_1 中正规. 因为由假设 M 有正规 p 补, 所以 7.2.3 蕴含了 Z 关于 M 在 T_1 中弱闭. 但由 7.1.9 得 Z 正规于 M 的每一个包含 Z 的 Sylow p 子群. 因此 $Z \trianglelefteq N_R(S)$. 这和 $S < N_R(S)$ 矛盾. 于是 (′) 得到证明. □

当 $p \neq 2$ 时, Thompson 相当大地改进了上述定理. 在 9.4.7 中, 将给出 Thompson 正规 p 补定理的一个版本: 对奇素数 p, 证明了如果 $N_G(U)$ 有正规 p 补那么 G 也有正规 p 补, 其中, U 是 P 的某个特征子群①.

习　　题

设 G 是群且 P 是 G 的一个子群.

1. 设 $P \leqslant Z(G)$. 那么对每一个 $x \in G$ 有 $x^{T G\to P} = x^{|G:P|}$.
2. 如果 P 是 G 的交换 Hall 子群, 那么 $P \cap G' \cap Z(G) = 1$.
3. 假设 G 的所有 Sylow 子群都是交换的, 那么 $G' \cap Z(G) = 1$.
4. 设 P 是 G 的一个交换 Sylow p 子群. 那么 G 有一个同构于 $Z(N_G(P)) \cap P$ 的商群.
5. 设 P 是 G 的一个使 $N_G(P) = C_G(P)$ 的 Hall 子群. 那么 P 在 G 中有一个正规补.
6. 假设对 G 的每一个非平凡的 p 子群 P, $N_G(P)/C_G(P)$ 是 p 群. 那么 G 有一个正规 p 补.
7. (Iwasawa(岩泽), [71]) 假设 G 的每一个真子群都是幂零的, 那么 G 可解②.
8. 如果 G 有一个幂零的 Hall π 子群 ($\pi \subseteq \pi(G)$), 那么在 G 中 π Sylow 定理成立.
9. 设 $S \in \mathrm{Syl}_2 G$ 且 $S = H\langle a\rangle$ 如同 110 页 5.3.2(d) 中的情形, 那么 $G \neq O^2(G)$.
10. 设 $G = O^2(G)$. 假设 G 有一个二面体或半二面体 Sylow 2 子群, 则 G 的所有对合在 G 中共轭.

① 在 9.4 节的记法中, $U = W(P)$.
② 对照 6.1 节后习题 10.

11. 设 G 是一个其 Sylow 2 子群的阶至少为 16 的 (广义) 四元数群的完备群. 那么对 G 的每一个对合 t, 有 $C_G(t)$ 非可解.

12. 证明具有可解 Frobenius 补的 Frobenius 群的 Frobenius 定理 4.1.6.

设 p 和 q 是两个不同的奇素数. 记域 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的乘法群为 $\mathbb{Z}_p^*$, 令 $\mathbb{Z}_p^* = \{\overline{1}, \cdots, \overline{p-1}\}$, 其中, $\overline{z} = z + p\mathbb{Z}$. 此外还令

$$R := \left\{1, \cdots, \frac{p-1}{2}\right\},$$

$$S := \left\{1, \cdots, \frac{q-1}{2}\right\},$$

$$F(z,p) := \{r \in R | (-rz + p\mathbb{Z}) \cap R \neq \varnothing\},$$

$$F(z,q) := \{s \in S | (-sz + p\mathbb{Z}) \cap R \neq \varnothing\},$$

$$M := \left\{(a,b) \in R \times S | -\frac{q-1}{2} \leqslant bp - aq \leqslant \frac{p-1}{2}\right\}.$$

13. 设 $H := \{\overline{1}, \overline{p-1}\} \leqslant \mathbb{Z}_p^*$ 且 $\overline{R} = \{\overline{x} | x \in R\}$. 那么对所有的 $\overline{x} \in \mathbb{Z}_p^*$ 有

(a) $\overline{R}$ 是 H 在 $\mathbb{Z}_p^*$ 中的代表系.

(b) $\overline{x}^{T\mathbb{Z}_p^* \to H} = \overline{x}^{\frac{p-1}{2}} = (\overline{-1})^{|F(x,p)|}$.

(c) $\overline{x}$ 是 $\mathbb{Z}_p^*$ 中的平方元当且仅当 $|F(x,p)|$ 是偶数.

14. (a) $|M| = |F(q,p)| + |F(p,q)|$.

(b) 映射

$$\varepsilon : R \times S \to R \times S, \text{ 其中, } (a,b) \mapsto \left(\frac{p+1}{2} - a, \frac{q+1}{2} - b\right)$$

是在 $R \times S$ 上的对合双射, 且满足

(i) $M^\varepsilon = M$.

(ii) $y^\varepsilon \neq y$, $\forall y \in (R \times S) \backslash M$.

(c) $\dfrac{p-1}{2}\dfrac{q-1}{2} \equiv |F(q,p)| + |F(p,q)| \pmod 2$.

15. 用习题 13 和 14 证明 Gauss(高斯) 二次互反律.

第 8 章　群在群上的作用

群 A 在集合 G 上的作用由同态

$$\pi: A \to S_\Omega$$

所描述, 见 3.1 节. 假设 G 不仅是集合而且还是群, 那么 $\mathrm{Aut}\ G \leqslant S_G$, 且如果 $\mathrm{Im}\ \pi$ 是 $\mathrm{Aut}\ G$ 的一个子群, 则说 π 描述了 A 在群 G 上的作用. 换句话说, 此时 A 在 G 上的作用不仅满足 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$, 而且满足

$\mathcal{O}_3$　对所有的 $g, h \in G$ 和 $a \in A$, 有 $(gh)^a = g^a h^a$.

共轭作用也是满足 $\mathcal{O}_3$ 的作用的一个非常重要的例子. 例如, 如果 A 是群 H 的子群且 G 是 H 的正规子群, 那么 A 可由共轭作用在群 G 上. 事实上, 在半直积 $A \ltimes_\pi G$ 中由 π 所描述的作用就是 A 在 G 上的共轭作用 (见 26 页).

在本章中, 有时用半直积是比较方便的 (甚至是必须的), 这样就可以应用一些定理, 如 Sylow 定理或 Schur-Zassenhaus 定理. 把 $A \ltimes_\pi G$ 简记为 AG.

8.1　在群上的作用

设群 A 作用在群 G 上. 首先介绍一些记号, 如果 A 和 G 嵌入它们的半直积中, 那么这些记号就和以前的记号是一致的.

对 $U \subseteq G$ 和 $B \subseteq A$, 记

$$N_B(U) := \{b \in B \mid U^b = U\},$$

$$C_B(U) := \{b \in B \mid u^b = u,\ \forall u \in U\},$$

$$C_U(a) := \{u \in U \mid u^a = u\} \quad (a \in A),$$

$$C_U(B) := \bigcap_{b \in B} C_U(b).$$

$C_G(A)$ 是 A 在 G 中的**不动点** (fixed points) 子群, $C_A(G)$ 是 A 在群 G 上的作用的核. 通过

$$g \overset{aC_A(G)}{\longmapsto} g^a \quad (g \in G,\ a \in A)$$

商群 $A/C_A(G)$ 忠实地作用在 G 上.

在较一般的情形下也用换位子记号

$$[g,a] := g^{-1}g^a \quad (g \in G,\ a \in A),$$
$$[U,a] := \langle [g,a] | g \in U \rangle \quad (a \in A,\ U \subseteq G),$$
$$[U,B] := \langle [U,a] | a \in B \rangle \quad (B \subseteq A).$$

类似地, 定义 $[a,g] := g^{-a}g$, $[a,U]$ 和 $[B,U]$. 在 1.5 节中给出的换位子关系在更一般的情形下也成立:

$$[U,B]^a = [U^a, B^a] \quad (a \in A),$$
$$[A,G] = [G,A],$$
$$U \leqslant C_G(a) \Leftrightarrow [U,A] = 1.$$

特别地, 三子群引理成立

$$[X,Y,Z] = [Y,Z,X] = 1 \Rightarrow [Z,X,Y] = 1,$$

其中, X, Y, Z 可以是 G 或 A 的子群. 20 页 1.5.4 的结果现在就成为

$$[gx,a] = [g,a]^x[x,a] \quad (g,x \in G,\ a \in A).$$

从这一条可以得到 $[G,A]$ 是 G 的 A 不变正规子群.

8.1.1　设 U 是 G 的 A 不变子群, 则

$$[G,A] \leqslant U \Leftrightarrow (Ug)^a = Ug,\ \forall g \in G,\ a \in A.$$

证明　对 $a \in A$ 和 $g \in G$ 有

$$(Ug^{-1})^a = Ug^{-1} \Leftrightarrow Ug^{-a} = Ug^{-1} \Leftrightarrow [g,a] \in U.$$ □

8.1.2　设 N 是 G 的 A 不变正规子群.

(a) 如果 A 平凡地作用在 G/N 上, 那么 $[G,A] \leqslant N$.

(b) 如果 A 平凡地作用在 N 上, 那么 A 也平凡地作用在 $G/C_G(N)$ 上.

(c) 如果 A 平凡地作用在 N 和 G/N 上, 那么 $[G,A] \leqslant Z(N)$ 且 $A' \leqslant C_A(G)$.

证明　(a) 从 8.1.1 可得到 (a).

(b) 设 $[N,A] = 1$. 那么

$$[N,A,G] = 1 = [G,N,A],$$

从而由三子群引理得到 $[A,G,N]=1$. 于是 $[A,G]\leqslant C_G(N)$, 即 A 平凡地作用在 $G/C_G(N)$ 上 *.

(c) 从 (a) 和 (b) 得到

$$[G,A]\leqslant N\cap C_G(N)=Z(N).$$

于是有 $[G,A,A]=1=[A,G,A]$. 再由三子群引理得到所要的结论 $[A',G]=[A,A,G]=1$. □

8.1.3 设 A 是一个 p 群. 那么 G 中存在 A 不变的 Sylow p 子群.

证明 设 $A\leqslant \widehat{P}\in\mathrm{Syl}_p AG$. 那么 $P:=\widehat{P}\cap G$ 就是所求的 Sylow p 子群 (见 52 页 3.2.5). □

8.1.4 设 A 是一个 p 群.

(a) 如果 $p\in\pi(G)$, 那么 $C_G(A)\neq 1$.

(b) 如果 G 是 p 群, 那么 $[G,A]<G$.

证明 (a) 由 8.1.3, G 中存在一个 A 不变 Sylow p 子群 P. 因此, P 是半直积 PA 的正规子群. 因为 AP 是一个 p 群, 从 3.1.11(a) 得到 (a).

(b) 这就是 5.1.6 的 (iii). □

8.1.5 设 K 是 G 的一个 A 合成因子且 K 是 p 群. 那么 $[K,O_p(A)]=1$.

证明 p 群 $B:=O_p(A)$ 作用在 p 群 K 上, 于是由 8.1.4 得到 $C_K(B)\neq 1$. 因为 K 是一个 A 合成因子且 $C_K(B)$ 是一个 A 不变的, 得到 $C_K(B)=K$. □

假设 G 有一个在 A 下不变的直积分解

$$G=E_1\times\cdots\times E_n,$$

即

$$\text{对所有的 } a\in A \text{ 和 } i\in\{1,\cdots,n\} \text{ 有 } E_i{}^a\in\{E_1,\cdots,E_n\}.$$

再进一步假设 A 传递地作用在 $\{E_1,\cdots,E_n\}$ 上, 比较不动点子群 $C_G(A)$ 和 $C_{E_i}(N_A(E_i))$.

设

$$E\in\{E_1,\cdots,E_n\},\quad B:=N_A(E)$$

且 S 是 B 在 A 中的陪集代表系, 则

(+) $G=\langle E^A\rangle=\underset{s\in S}{\times}E^s$.

在上述的假设下, 下面的结论成立:

8.1.6 (a) $C_G(A)=\left\{\prod\limits_{s\in S}e^s|e\in C_E(B)\right\}$.

* 为便于读者理解, 增加了最后一句论述. —— 译者注

(b)[①] 如果 B 平凡地作用在 E 上, 且有 $P \leqslant E$ 使 $\langle P^E \rangle = E$, 则

$$G = \left\langle C_G(A), \prod_{s\in S} P^s \right\rangle.$$

证明 (a) 设 $g \in G$ 且

$$F := \left\{ \prod_{s\in S} e^s | e \in C_E(B) \right\}.$$

因为 S 是一个代表系, 所以对每一个 $(s,a) \in S \times A$ 存在唯一的 $(b(s,a), s_a) \in B \times S$ 使

$$sa = b(s,a)s_a.$$

注意到在这里映射 $s \mapsto s_a$ 是 S 上的双射.

设 $g = \prod_{s\in S} e^s \in F$. 那么对每一个 $a \in A$, 因 $e \in C_E(B)$ 得

$$g^a = \prod_{s\in S} e^{sa} = \prod_{s\in S} e^{b(s,a)s_a} = \prod_{s\in S} e^{s_a} = g.$$

于是 $F \leqslant C_G(A)$.

设 $g \in C_G(A)$. 由 (+) 知 g 有唯一的表示

$$g = \prod_{s\in S} e_s \quad (e_s \in E^s).$$

对所有的 $a \in A$, 有

$$\prod_{s\in S} e_s = g = g^a = \prod_{s\in S} {e_s}^a,$$

从而由表示的唯一性得到

$$\{e_s | s \in S\} = \{{e_s}^a | s \in S\}.$$

设 $s_0 \in B \cap S$, $e := e_{s_0}$. 那么对所有的 $b \in B$ 有 $e^b = e$, 从而 $g = \prod_{s\in S} e^s \in F$, 因此 $C_G(A) \leqslant F$.

(b) 从 (a) 得到

$$C_G(A) = \left\{ \prod_{s\in S} e^s | e \in E \right\},$$

① 这在第 9 章中要用到.

且对 $s \in S$ 有

$$\langle (P^s)^{C_G(A)} \rangle = \langle (P^s)^{E^s} \rangle = \langle P^E \rangle^s = E^s.$$

这就得到了 (b). □

用一些关于循环算子群的评注来作为本节的结束.

8.1.7 设 $A = \langle a \rangle$ 循环. 那么对 $x, y \in G$ 有

$$[x, a] = [y, a] \Leftrightarrow xy^{-1} \in C_G(A).$$

特别地, $|G : C_G(A)|$ 就是换位子 $[x, a], x \in G$ 的个数①.

证明 $x^{-1}x^a = y^{-1}y^a \Leftrightarrow yx^{-1} = y^a x^{-a} \Leftrightarrow yx^{-1} = (yx^{-1})^a \Leftrightarrow yx^{-1} \in C_G(a)$. □

8.1.8 设 $A = \langle a \rangle$ 使得 $[G, a^2] = 1$ 且 G 是奇阶的, 则

$$\{x \in G | x^a = x^{-1}\} = \{[x, a] | x \in G\}$$

且 $C_G(a)$ 在 G 中的每一个陪集恰含一个换位子 $[x, a]$. □

证明 因为 $[G, a^2] = 1$, 所以对每一个换位子 $[x, a]$ 有

$$[x, a]^a = (x^{-1}x^a)^a = x^{-a}x^{a^2} = x^{-a}x = [x, a]^{-1}.$$

如果能够证明 $C_G(a)$ 的每一个陪集至多包含一个使得 $x^a = x^{-1}$ 的元素 x, 那么从 8.1.7 就可以得到结论.

设 x 和 xf 是两个这样的元素, 其中, $f \in C_G(a)$. 那么有

$$x^a = x^{-1}, \quad (xf)^a = f^{-1}x^{-1} \text{ 且 } f^a = f.$$

这蕴含了

$$f^{-1}x^{-1} = (xf)^a = x^a f^a = x^{-1} f,$$

因此 $f^x = f^{-1}$, 于是 $f^{x^2} = f$. 因为 x 为奇阶, 所以 $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle$. 因此 $f = f^{-1}$. 从而因 f 是奇阶而得到 $f = 1$. □

如果

$$C_G(A) = 1,$$

则称算子群 A **无不动点** (fixed-point-freely) 地作用在 G 上. 类似地, 如果对 $a \in A$ 有 $C_G(a) = 1$, 则称 a 无不动点地作用在 G 上.

从 8.1.4, 得到

8.1.9 设 A 是 p 群. 假设 A 无不动点作用在 G 上. 那么 G 是一个 p' 群.

---

① 在半直积 $S := \langle a \rangle G$ 中, 这个数等于 $|a^S|$.

8.1.8 蕴含了

8.1.10　设 a 是 G 的 2 阶无不动点自同构. 那么对所有的 $x \in G$ 有

$$x^a = x^{-1}.$$

特别地, G 是交换的①. □

对任意的 $p \in \mathbb{P}$, 由 p 阶无不动点自同构的存在也可得到关于 G 的结构的结论. 此时, Thompson 的一个定理证明了 G 是幂零的. 但因这个定理的证明需要 Thompson 的另一个基本定理 (见 9.4.7), 所以把这个定理的证明推迟到 9.5 节而继续讨论无不动点作用. 这里, 强调对无不动点自同构, 归纳法是有效的.

8.1.11　设 a 是 G 的无不动点自同构.

(a) $G = \{[x,a] | x \in G\} = \{x^{-1}x^a | x \in G\}$.

(b) 对每一个 $p \in \pi(G)$, G 中存在一个 a 不变②的 Sylow p 子群.

(c) 设 N 是 G 的 a 不变正规子群. 那么 a 无不动点地作用在 G/N 上.

证明　8.1.7 就是 (a). 对于 (b) 的证明, 设 $P \in \mathrm{Syl}_p G$ 且 $g \in G$ 使得 $P^a = P^g$. 由 (a), 存在 $x \in G$ 使 $g = x^{-1}x^a$. 于是由

$$(P^{x^{-1}})^a = P^{ax^{-a}} = P^{gx^{-a}} = P^{x^{-1}x^a x^{-a}} = P^{x^{-1}}$$

得到 (b).

(c) 设对某个 $x \in G$ 有 $(xN)^a = xN$, 则 $x^{-1}x^a \in N$. 那么, 把 (a) 应用到 $(N, a|_N)$ 上可证得存在 $y \in N$ 使得 $x^{-1}x^a = y^{-1}y^a$. 这蕴含了

$$yx^{-1} = y^a x^{-a} = (yx^{-1})^a,$$

从而有 $x = y$, $xN = yN = N$. □

Frobenius 群提供了无不动点作用的例子.

8.1.12　设 G 是非平凡子群 H 和正规子群 K 的半直积. 那么下列命题等价:

(i) G 是一个有 Frobenius 补 H 和 Frobenius 核 K 的 Frobenius 群.

(ii) 对所有的 $h \in H^\#$, $C_K(h) = 1$③.

证明　由分解式 $G = HK$ 和 64 页 4.1.7 得到

$$\text{(i)} \Leftrightarrow H \cap H^x = 1, \forall x \in K^\#.$$

另一方面, 因 $H \cap K = 1$ 得到, 对所有的 $h \in H^\#$ 和 $x \in K^\#$ 有

$$h^x \in H \cap H^x \Leftrightarrow x^{-1}h^{-1}xh = [x,h] \in H \cap K \Leftrightarrow x \in C_K(h)^\#.$$

---

① 这是 16 页习题 4.

② a 不变等于 $\langle a \rangle$ 不变.

③ 就是说, h(关于共轭) 无不动点的作用在 K 上.

于是得出 (i) 和 (ii) 的等价性. □

习 题

设群 A 作用在群 G 上, AG 是 A 和 G 的半直积.

1. 设 $\varphi: A \to S_G$ 和 $\rho: G \to S_G$ 分别是描述 A 在群 G 上的右乘作用和 G 在集合 G 上的右乘作用. 假设 A 忠实作用在 G 上. 那么有

$$AG \cong A^{\varphi}G^{\rho}.$$

2. 设 G 可解, A 幂零且 N 是 G 的 A 不变正规子群. 假设 A 无不动点地作用在 G 上. 那么 A 无不动点地作用在 G/N 上 (对照 96 页习题 8).

设 $[G, A; 1] := [G, A]$ 且 $[G, A; n] := [[G, A; n-1], A]$, 其中, $n \geqslant 2$. 那么称 A **幂零地** (nilpotently) 作用在 G 上, 如果存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $[G, A; n] = 1$.

3. 设 A 和 G 是 p 群. 那么 A 幂零地作用在 G 上.

4. A 幂零地作用在 G 上当且仅当 A 是 AG 的次正规子群.

5. 设 A_1 和 A_2 是 A 的两个正规子群. 如果 A_1 和 A_2 幂零地作用在 G 上, 那么 A_1A_2 也幂零地作用在 G 上.

6. 设 $C_A^*(G)$ 是由 A 的所有幂零地作用在 G 上的次正规子群生成的子群. 那么 $C_A^*(G)$ 幂零地作用在 G 上.

在下面 2 个习题中, G 共轭作用在 G 上, 且 $C_A^*(G)$ 是在习题 6 中所定义的子群.

7. $C_A^*(G) = F(G)$.

8. 设 $\mathcal{F}$ 是 G 的所有满足 $C_A^*(N) \leqslant N$ 的正规子群 N 的集合. 那么

$$F^*(G) = \bigcap_{N \in \mathcal{F}} N.$$

8.2 互 素 作 用

同 8.1 节, 设群 A 作用在群 G 上. 如果下面 2 条成立:

(1) $(|A|, |G|) = 1$.

(2) A 或 G 可解[①],

则称 A 在 G 上的作用是**互素的** (coprime).

因为在半直积 AG 中子群 A 是正规子群 G 的补群, 所以在互素作用的情形下, Schur-Zassenhaus 定理的假设条件满足. 因此, AG 中每一个 $|A|$ 阶的子群和 A 共轭.

这个共轭性质的第一个结果是[②]

---

① 因为由 (1) 知道群 A 和 G 中至少有一个是奇阶群, 所以再次强调由前面所提到的 Feit-Thompson 定理说明 (1) 蕴含 (2).

② 对左陪集来说类似的结论也成立.

8.2.1 假设 A 在 G 上的作用是互素的. 设 U 是 G 的 A 不变子群, 且 $g \in G$ 使 $(Ug)^A = Ug$. 那么存在 $c \in C_G(A)$, 使得 $Ug = Uc$.

证明 $U^A = U$ 且 $(Ug)^A = Ug$ 蕴含了 $g^a g^{-1} \in U, \forall a \in A$. 在半直积 AG 中, 得到 $a^{-1}gag^{-1} \in U$ 且

$$A^{g^{-1}} \leqslant AU.$$

因此, A 和 $A^{g^{-1}}$ 是 U 在 AU 中的补, 从而由 Schur-Zassenhaus 定理 (见 96 页 6.2.1) 得它们在 AU 中共轭. 于是存在 $u \in U$ 使 $A^u = A^{g^{-1}}$. 对 $c := ug$, 这给出了

$$c \in N_{AG}(A) \cap Ug,$$

从而有 $[A, c] \leqslant A \cap G = 1$. □

对 A 是 p 群的特殊情形, 8.2.1 的证明可不用 Schur-Zassenhaus 定理, 而从 47 页 3.1.7 得出 (用$\Omega := Ug$).

8.2.2 设 N 是 G 的一个 A 不变正规子群. 假设 A 在 N 上的作用是互素的, 则

(a) $C_{G/N}(A) = C_G(A)N/N$[①,②].

(b) 如果 A 平凡地作用在 N 和 G/N 上, 那么 A 平凡地作用在 G 上[③].

证明 (b) 是 (a) 的一个推论, 而 (a) 由 8.2.1, 令 $U := N$ 得出. □

下一个结果是 Schur-Zassenhaus 定理的另一个重要推论, 它蕴含在 Sylow 定理的思想中. 至于 8.2.1, 如果 A 是 p 群的话, 它的证明是初等的.

8.2.3 设 p 是 $|G|$ 的一个素因子. 假设 A 在 G 上的作用是互素的, 则

(a) G 中存在一个 A 不变 Sylow p 子群.

(b) G 的 A 不变 Sylow p 子群在 $C_G(A)$ 下共轭.

(c) 每一个 A 不变 p 子群包含在 G 的一个 A 不变 Sylow p 子群中.

证明 半直积 AG 由共轭作用在集合 $\Omega := \mathrm{Syl}_p G$ 上, 且由 Sylow 定理知 G 在 Ω 上传递. 用 (G, A) 代替 (K, A), 从 98 页 6.2.2 得到 (a) 和 (b).

(c) 设 U 是 G 的极大 A 不变 p 子群. 证明 U 是 G 的一个 Sylow p 子群.

假设 $U \notin \mathrm{Syl}_p G$. 那么 U 不是 $G_1 := N_G(U)$ 的 Sylow p 子群 (见 52 页 3.2.6). 因为 G_1 是 A 不变的, 所以由 (a) 得, 存在 A 不变的 $T \in \mathrm{Syl}_p G_1$. 但 $U < T$, 这和 U 的极大性矛盾. □

G 的所有 Sylow p 子群的交 $O_p(G)$ 是 G 的最大的正规 p 子群. 在 8.2.3 的情形下, 有类似的结论成立.

---

① 一般情形下, 只有 $C_G(A)N/N \leqslant C_{G/N}(A)$.

② 对照 3.2.8(a).

③ 对照 8.1.2.

8.2.4 假设 A 在 G 上的作用是互素的. 设 $p \in \pi(G)$. 那么 G 的所有 A 不变 Sylow p 子群的交是 G 的被 $C_G(A)$ 正规化的最大 A 不变 p 子群.

证明 由 8.2.3(a) 和 (b), 存在 $S \in \mathrm{Syl}_p G$ 使 $S^A = S$ 且

$$\{P \in \mathrm{Syl}_p G | P^A = P\} = \{S^c | c \in C_G(A)\}.$$

因此这些 Sylow p 子群的交是 $C_G(A)$ 不变的.

任何 A 不变 p 子群 U 都包含在 G 的一个 A 不变 Sylow p 子群中 (见 8.2.3(c)). 如果还有 U 被 $C_G(A)$ 正规化, 那么同上面所见到的那样, U 包含在每一个 A 不变 Sylow p 子群中, 从而包含在它们的交中. □

8.2.5 假设 A 在 G 上的作用是互素的. 设 P 是 G 的 A 不变 Sylow p 子群. 如果 H 是 G 的在 A 和 $C_G(A)$ 下不变的子群, 那么 $P \cap H$ 是 H 的一个 Sylow p 子群.

证明 由 8.2.3(a) 和 (c), 存在 H 的 A 不变 Sylow p 子群 R 使得 $P \cap H \leqslant R$, 且有 G 的一个 A 不变 Sylow p 子群 S 使得 $R \leqslant S$, 即

$$H \cap S = R.$$

因此存在 $c \in C_G(A)$ 使得 $S^c = P$ (见 8.2.3(b)), 从而由假设得 $H^c = H$. 由此得到

$$H \cap P = H \cap S^c \in \mathrm{Syl}_p H.$$

□

在第 11 章中, 将需要 8.2.3~8.2.5 对于可解群 G 的变化形式. 注意到在前面的证明中, 对 $p \in \pi(G)$ 只用到 Sylow 定理, 而没有用 Schur-Zassenhaus 定理.

如果把 p 替换为一个非空集合 $\pi \subseteq \pi(G)$ 且设 π Sylow 定理成立 (见 105 页 6.4.7), 那么用 Hall π 子群代替 Sylow p 子群, 同样的论证就会得到所需的结论.

因为在可解群中 π Sylow 定理成立 (见 105 页 6.4.7), 所以有

8.2.6 假设 A 在可解群 G 上的作用是互素的, 则有

(a) G 中存在 A 不变 Hall π 子群.

(b) G 的 A 不变 Hall π 子群在 $C_G(A)$ 下共轭.

(c) 每一个 A 不变 π 子群包含在 G 的一个 A 不变 Hall π 子群中.

(d) G 的所有 A 不变 Hall π 子群的交是 G 的由 $C_G(A)$ 正规化的最大的 A 不变 π 子群.

(e) 如果 P 是 G 的一个 A 不变 Hall π 子群, 而 H 是 G 的由 $C_G(A)$ 正规化的 A 不变子群, 那么 $P \cap H$ 是 H 的 Hall π 子群. □

A 在 G 中的不动点群和 8.2.2(a) 中所述的 G 的商群之间有一些有趣的结果.

8.2.7　假设 A 在 G 上的作用是互素的, 则有

(a) $G = [G, A]C_G(A)$.

(b) $[G, A] = [G, A, A]$.

证明　注意到 8.1.1, 取 $N := [G, A]$, 从 8.2.2(a) 得到 (a). 由 20 页 1.5.4 的换位子公式知道 (a) 蕴含 (b). □

8.2.8　Thompson $P \times Q$ 引理　设 $A = P \times Q$ 是 p 群 P 和 p' 群 Q 的直积. 假设 A 是一个使

$$C_G(P) \leqslant C_G(Q)$$

的 p 群. 那么 Q 平凡地作用在 G 上.

证明　对 G 的所有的 A 不变子群 U 有 $C_U(P) \leqslant C_U(Q)$. 于是对 $|G|$ 用归纳法, 可假设对 G 的所有的 A 不变真子群 U 有 $[U, Q] = 1$. 因由 8.1.4(b), $[G, P]$ 是一个真子群, 所以得到

$$[G, P, Q] = 1 \text{ 且 } [P, Q, G] = 1,$$

其中, 因 $[P, Q] = 1$, 第 2 式成立. 由三子群引理得 $[Q, G, P] = 1$, 即

$$[Q, G] \leqslant C_G(P) \leqslant C_G(Q),$$

从而 $[G, Q, Q] = 1$. 于是从 8.2.7(b) 得 $[G, Q] = 1$(用 Q 替代 A). □

8.2.9　假设 A 平凡地作用在 $G/\Phi(G)$ 上.

(a) 如果 A 在 $\Phi(G)$ 上的作用是互素的, 那么 A 平凡地作用在 G 上.

(b) 如果 $\Phi(G)$ 是一个 p 群, 那么 $A/C_A(G)$ 也是一个 p 群.

证明　由 8.2.2(a) 得 $G = \Phi(G)C_G(A)$, 从而有 $G = C_G(A)$ (见 5.2.3).

(b) 由 (a) 得 A 的每一个 p' 子群平凡地作用在 G 上. □

8.2.10　设 G 是一个 p 群, $\mathcal{K}$ 是 G 的所有 A 合成因子的集合, 则

$$\bigcap_{K \in \mathcal{K}} C_A(K)/C_A(G) = O_p(A/C_A(G))^*.$$

证明　可假设 A 忠实地作用在 G 上. 由 8.1.5, $O_p(A)$ 平凡地作用在每一个 A 合成因子 $K \in \mathcal{K}$ 上. 另一方面, 由 8.2.2(b), 如果 A 的每一个 p' 子群 B 平凡地作用在每一个 A 合成因子 $K \in \mathcal{K}$ 上, 那么 B 平凡地作用在 G 上. 这就证明了结论. □

下面的结果将在第 11 章中用到:

8.2.11　假设 A 在 G 上的作用是互素的. 设 G 是两个 A 不变子群 X 和 Y 的乘积. 那么 $C_G(A) = C_X(A)C_Y(A)$.

---

* 原书此命题多了一个条件"假设 A 在 G 的作用为互素", 此条件是不必要的. —— 译者注

证明 设 $g = xy \in C_G(A)$, $x \in X$, $y \in Y$. 那么 $xy = (xy)^a = x^a y^a$, 从而对所有的 $a \in A$ 有

$$x^{-1}x^a = yy^{-a} \in X \cap Y =: U.$$

这蕴含了 $(xU)^A = xU$ 和 $(Uy)^A = Uy$. 由 8.2.1, 存在元素 $c \in C_X(A)$, $d \in C_Y(A)$ 和 $u, w \in U$ 使得

$$x = cu \quad \text{且} y = wd^{①}.$$

因为 $cuwd = xy \in C_G(A)$, 且

$$uw \in C_G(A) \cap X \cap Y,$$

从而有 $xy \in C_X(A)C_Y(A)$. □

以 $P \times Q$ 引理的一个特别重要的应用来结束本节.

8.2.12 设 $p \in \pi(G)$ 且 $\overline{G} := G/O_{p'}(G)$. 假设

(*) $C_{\overline{G}} \leqslant O_p(\overline{G})$.

那么对 G 的每一个 p 子群 P, 有

$$O_{p'}(N_G(P)) = O_{p'}(G) \cap N_G(P).$$

证明 $C_G(P) \trianglelefteq N_G(P)$ 蕴含

$$O_{p'}(N_G(P)) = O_{p'}(C_G(P)).$$

因此, 只要证明

$$O_{p'}(G) \cap C_G(P) = O_{p'}(C_G(P))$$

就足够了.

包含关系 $O_{p'}(G) \cap C_G(P) \leqslant O_{p'}(C_G(P))$ 是显然的.

对相反包含关系的证明, 可以假设 $O_{p'}(G) = 1$ (见 53 页 3.2.8). 设

$$G_1 := O_p(G), \quad Q := O_{p'}(C_G(P)).$$

由假设知 $C_G(G_1) \leqslant G_1$, $PQ = P \times Q$ 作用在 p 群 G_1 上. 因为 $C_{G_1}(P)$ 是 $C_G(P)$ 的正规子群, 所以群 Q 平凡地作用在 $C_{G_1}(P)$ 上. 因此, 由 $P \times Q$ 引理 (见 8.2.8) 得 $Q \leqslant C_G(G_1) \leqslant G_1$, 于是 $Q = 1$. □

注意到可解群或更一般的 p 可分群均满足 8.2.12 中的假设 (*)(见 6.4.3 和 6.4.1).

作为 8.2.12 的推论, 得到

---

① 见 139 页脚注 ②.

8.2.13　设 P 是 G 的 p 子群且 $U \leqslant O_{p'}(N_G(P))$. 假设 U 和 P 均包含在 G 的可解子群 L 中. 那么有 $U \leqslant O_{p'}(U)$.

证明　有 $U \leqslant O_{p'}(N_L(P))$. 因此, 因 L 可解从 8.2.12 得到所要的结论 (用 L 替换 G). □

习　题

设 A 是作用在 G 上的群.

1. 假设 A 在 G 上的作用是幂零的和忠实的 (见 139 页). 那么 $\pi(A) \subseteq \pi(G)$.

2. 设 $U \leqslant C_G(A)$, $x \in G$ 使得 $U^x \leqslant C_G(A)$. 如果 A 在 G 上的作用是互素的, 那么存在一个 $y \in C_G(A)$, 使得 $U^x = U^y$.

3. (Zassenhaus, [102]) 设 $|A| = 2 = |C_G(A)|$, 则存在 G 的交换正规子群 N, 使得

(a) 对 $a \in A^{\#}$ 有 $x^a = x^{-1}$.

(b) 如果 $|G/N| \neq 2$, 则 $N = Z(G)$, 且 $G/A \cong A_4$.

4. 设 G 是 π 可分的. 那么对每一个 $p \in \pi'$, $\pi \cup \{p\}$ Sylow 定理在 G 中成立. (运用 G 的每一个 π 或 π' 截断是可解的.)

8.3　在交换群上的作用

下面两节研究群在交换群上的作用. 因此, 下设 A 是一个作用在交换群 V 上的群. 这里选择记号 V 是因为要在许多场合下提醒读者 V 是一个初等交换 p 群, 从而也是 $\mathbb{F}_p$ 上的向量空间.

A 在 V 上的作用称为是**不可约的** (irreducible), 如果 1 和 V 是 V 仅有的 A 不变子群且 $V \neq 1$. 对半直积 AV 来说, 这意味着 V 是一个极小正规子群且 A 是一个极大子群.

下面的评注是对本节来说是基本的:

8.3.1　设 $\mathcal{A}$ 是 A 的使

(#) $A^{\#} = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{A}} B^{\#}$①

的真子群的非空集合且 $k := |\mathcal{A}| - 1$. 如果

$$(k, |V|) = 1$$

且 $V \neq 1$, 那么存在 $B \in \mathcal{A}$ 使 $C_V(B) \neq 1$.

证明　对 $v \in V$ 和 $B \leqslant A$, 令

$$v_B := \prod_{a \in B} v^a = v \prod_{a \in B^{\#}} v^a.$$

① $\mathcal{A}$ 称为 A 的一个划分. 关于具有划分的群的一个出色的结果可在文献 [16] 中找到.

那么, 对每一个 $b \in B$ 有

$$(v_B)^b = \prod_{a\in B} v^{ab} = v_B,$$

所以 $v_B \in C_V(B)$. 因为 $\mathcal{A}$ 是 A 的一个划分, 所以有

$$v_A = \left(\prod_{B\in\mathcal{A}} v_B\right) v^{-k}.$$

假设对所有的 $B \in \mathcal{A}$ 有 $1 = C_V(B)$ ($\geqslant C_V(A)$). 那么 $v_B = v_A = 1$, 从而对每一个 $v \in V$ 有 $v^{-k} = 1$. 但 $(k, |V|) = 1$ 蕴含 $V = 1$, 于是得到矛盾 (对照 39 页 2.2.1). □

8.3.2 定理 设 $V \neq 1$, 且

(+) $C_V(a) = 1, \forall a \in A^{\#}$.

若下列之一成立, 则 A 循环:

(a) A 是交换群.

(b) A 是 p 群, $p \neq 2$.

(c) A 是一个 2 群但不是四元数群①.

(d) $|A| = pq$, 其中, p, q 是素数 (可以相等).

证明 注意到假设 (+) 对用 A 的每一个子群 A_1 取代 A 时也成立.

设 $p \in \pi(A)$, $A_1 \in \mathrm{Syl}_p A$. 那么 A_1 作用在 V 的 Sylow p 子群 V_p 上 (见 2.1.6). 如果 $V_p \neq 1$, 则由 8.1.4 得 A_1 在 V_p 中有非平凡的不动点. 因此 $V_p = 1$, 从而 A 在 V 上的作用是互素的.

现在假设 A 非循环. 在 (a), (b), (c) 情形, 应用 2.1.7 和 5.3.8 得到 A 有一个 p^2 阶的初等交换子群 A_1. 对 $|A|$ 用归纳法, 可假设 $A = A_1$. 在情形 (d) 时, 再次由 2.1.7 得 A 是 $pq(p \neq q)$ 阶的非交换群或 $p^2(p = q)$ 阶的初等交换群.

设 $\mathcal{A}$ 是 A 的所有素数阶子群的集合. 因为 $|A| = pq$, 集合 $\mathcal{A}$ 是 A 的如同 8.3.1 中那样的划分.

如果 A 是初等交换的, 则

$$|\mathcal{A}| = \frac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1.$$

设 A 是 pq 阶的非交换群, 其中 $q < p$. 那么 $\mathcal{A}$ 是 A 的非平凡的 Sylow 子群的集合, 而由 Sylow 定理知 G 恰好有 p 个 Sylow q 子群和一个 Sylow p 子群. 于是 $|\mathcal{A}| = p + 1$.

由 A 在 V 上的互素作用得 $(p, |V|) = 1$. 因此假设 (+) 和 8.3.1 矛盾. □

请将下面的结果和 8.6.1 进行对比.

① 对这样的四元数群的作用见 8.6 节.

8.3.3　设 A 是交换的. 假设 A 在 V 上的作用为不可约, 则 $A/C_A(V)$ 循环.

证明　可假设 $C_A(V)=1$. 于是对所有 $a\in A^\#$ 有 $C_V(a)\neq V$, 并且因为 A 是交换的, 故对所有的 $x\in A$ 有

$$C_V(a)^x = C_V(a^x) = C_V(a).$$

由 A 在 V 上的不可约作用得, 对所有的 $a\in A^\#$ 有 $C_V(a)=1$, 于是从 8.3.2 得到结论. □

作为 8.3.3 的一个推论, 可得出有限域的乘法群是循环的.

设 F 是以 V 为加群和 A 为乘群的有限域. 那么分配律表明 A 以右乘作用在 V 上, 并且它忠实和传递地作用在 $A^\#$ 上, 因此也是不可约的. 于是由 8.3.3 得到 A 循环.

8.3.3 的另一个重要的推论是

8.3.4　设 A 是作用在群 G 上的交换群. 假设 A 在 G 上的作用是互素的, 则

(a) $G=\langle C_G(B)|B\leqslant A$ 且 $r(A/B)\leqslant 1\rangle$①.

(b) 如果 A 非循环, 那么 $G=\langle C_G(a)|a\in A^\#\rangle$.

(c) $[G,A]=\langle [C_G(B),A]|B\leqslant A$ 且 $r(A/B)\leqslant 1\rangle$.

证明　设 $\mathcal{B}$ 是 A 的所有使 A/B 为循环的子群 B 的集合.

(a) 首先处理两个特殊的情形, 再证明一般情形可归结到这些特殊情形.

首先假定 G 是交换的. 如果 A 不可约地作用在 G 上, 那么由 8.3.3 得到 $B:=C_A(G)\in\mathcal{B}$, 从而有 $G=C_G(B)$. 因此可假设 A 在 G 上的作用可约. 设 W 是 G 的使 $1\neq W\neq G$ 的 A 不变子群. 对 $|G|$ 用归纳法, 运用到偶对 (W,A) 和 $(G/W,A)$ 上, 得到

$$W=\langle C_W(B)|B\in\mathcal{B}\rangle \text{ 且 } G/W=\langle C_{G/W}(B)|B\in\mathcal{B}\rangle.$$

因为 A 在 G 上的作用是互素的, 8.2.2 蕴含了

$$C_{G/W}(B)=C_G(B)W/W,$$

从而有

$$G=\langle C_G(B)W|B\in\mathcal{B}\rangle=\langle C_G(B)|B\in\mathcal{B}\rangle.$$

下设 G 是一个 p 群. 那么 A 作用在交换商群 $G/\Phi(G)$ 上. 因此由 8.2.2(a) 和上面已经证明的情形得出

$$G=\langle C_G(B)|B\in\mathcal{B}\rangle\Phi(G),$$

① $r(A/B)\leqslant 1$ 意味着 A/B 循环, 见 38 页.

于是和 5.2.3 一起得到结论.

在一般情形下, 8.2.3(a) 表明对每一个 $p \in \pi(G)$, G 中都存在 A 不变 Sylow p 子群 G_p. 同上面所见到的那样, 对偶对 (G_p, A) 结论成立. 于是因 $G = \langle G_p | p \in \pi(G) \rangle$, 对偶对 (G, A) 结论也成立.

(b) 从 (a) 得到.

(c) 对 $B \in \mathcal{B}$, 因为 A 是交换的, 所以子群 $G_B := C_G(B)$ 是 A 不变的. 因此由 8.2.7 得到

$$G_B = [G_B, A]C_{G_B}(A) = [G_B, A]C_G(A).$$

对 $G_1 := \langle [G_B, A] | B \in \mathcal{B} \rangle$, 这蕴含了

$$G_1 C_G(A) = \langle [G_B, A]C_G(A) | B \in \mathcal{B} \rangle = \langle G_B | B \in \mathcal{B} \rangle \overset{(a)}{=} G.$$

特别地, 有 $[G, A] \leqslant G_1$. 而另一包含关系是显然的. 因此结论成立. □

通过对 Frobenius 群的更进一步研讨来结束本节. 用 Frobenius 核是子群的 Frobenius 定理来完成这个工作 (见 4.1.6).

8.3.5 设 G 是以 K 为 Frobenius 核, H 为 Frobenius 补的 Frobenius 群. 假设 G 作用在一个非平凡的交换子群 V 上, 使得

$$(|V|, |K|) = 1 \text{ 且 } C_V(K) = 1,$$

则 $C_V(H) \neq 1$.

证明 令 $A := G$ 且

$$\mathcal{A} := \{K\} \cup \{H^a | a \in A\}.$$

那么 $\mathcal{A}$ 是 G 的一个如同 8.3.1 的 (#) 那样的划分. 又由 64 页 4.1.5 得

$$|\mathcal{A}| - 1 = |\{H^a | a \in A\}| = |K|.$$

根据 8.3.1, $\mathcal{A}$ 中存在 B 使 $C_V(B) \neq 1$, 并且因由假设有 $C_V(K) = 1$, 所以 $B \in \{H^a | a \in A\}$. 于是 $C_V(H) \neq 1$. □

现在用 8.3.5 来回答在 4.1 节中提出的关于 Frobenius 补的唯一性问题, 并且讨论它们的结构.

8.3.6 设 G 是以 K 为 Frobenius 核, H 为 Frobenius 补的 Frobenius 群, G_1 是 G 的子群. 假设 $G = G_1 K$. 那么 G_1 包含 H 的一个共轭.

证明 因为 $G_1 \not\leqslant K$, 故在取合适的共轭之后可设 $H \cap G_1 \neq 1$. 如果 $G_1 \leqslant H$, 那么由 Dedekind 等式 (见 1.1.11) 证得 $H = G_1(H \cap K)$, 从而因 $H \cap K = 1$ 有 $H = G_1$.

如果 $H \not\leqslant G_1$, 那么 G_1 是以 $K\cap G_1$ 为 Frobenius 核, $H\cap G_1$ 为 Frobenius 补的 Frobenius 群 (见 4.1.8(a)). 特别地, $|G_1| = |K\cap G_1||H\cap G_1|$. 另一方面, 由同态定理得 $G/K \cong G_1/G_1\cap K$. 于是

$$|H| = |G/K| = |G_1/G_1\cap K| = |H\cap G_1|,$$

这和 $H \not\leqslant G_1$ 矛盾. □

8.3.7 设 G 是 Frobenius 群. 那么 G 的所有 Frobenius 补共轭.

证明 设 H 和 H_0 是 G 的两个 Frobenius 补. 由 4.1.8(b), 可以假设 $H_0 \leqslant H$, 所以只要证明 $H_0 = H$ 就足够了.

假设 $H_0 < H$. 由 4.1.8(a), H 是以 H_0 为 Frobenius 补的 Frobenius 群. 设 K 是 G 的关于 H 为补的 Frobenius 核, K_0 是 H 的关于 H_0 为补的 Frobenius 核. 注意到 KK_0 是 G 的关于 H_0 为补的 Frobenius 核.

设

$$p\in\pi(K),\ P\in \mathrm{Syl}_p K,\ V := Z(P),\ G_1 := N_G(P).$$

由 Frattini 论断得 $G = KG_1$. 于是由 8.3.6, 可假设 $H \leqslant G_1$. Frobenius 群 H 作用在 V 上, 使得 $C_V(K_0) = 1$ 且 $(|V|, |K_0|) = 1$, 见 8.1.12(应用到 Frobenius 补 H 上) 和 4.1.5. 因此, 由 8.3.5(其中, $A := H$) 得 $C_V(H_0) \neq 1$. 但应用到 Frobenius 补 H_0 上时, 和 8.1.12 矛盾. □

用在 8.3.7 的证明中的论证也揭示了 Frobenius 补的 Sylow 子群的结构.

8.3.8 设 G 是以 H 为 Frobenius 补的 Frobenius 群. 那么 H 的 Sylow 子群是循环群或四元数群.

证明 设 K 是 G 的 Frobenius 核, $p\in\pi(K)$ 且 $P\in\mathrm{Syl}_p K$. 如同 8.3.7 的证明中那样, 可假设 H 正规化 $V := Z(P)$. 进一步, 由 8.1.12 推出

$$\text{对 } 1\neq h\in H, \text{ 有 } C_V(h) = 1.$$

于是从 8.3.2 得到结论. □

习 题

设 G 是一个群, A 为作用在 G 上的群.

1. 设 G 是交换的且 $A_1, \cdots, A_{n+1}$ 是 A 的一个划分. 再设

$$G_0 := \langle C_G(A_i) | i = 1, \cdots, n+1\rangle,$$

则 G/G_0 的方次数 $\leqslant n$.

2. 设 G 是幂零的且 $(|A|, |G|) = 1$. 如果 A 是交换的且 $r(A) \geqslant 2$, 那么

$$G = \prod_{a\in A^{\#}} C_G(a).$$

3. 设 G 是可解的 Frobenius 群. 那么 G 的 Frobenius 核 K 是幂零的且 $F(G) = K$①.

4. 设 G 是 p 可分群 ($p \in \mathbb{P}$), $A = \langle a \rangle \cong C_p$ 且 $H := AG$. 假设对所有的 $x \in G$ 有

$$xx^a \cdots x^{a^{p-1}} = 1,$$

则

(a) 元素 $y \in H \backslash G$ 无不动点地作用在 G 的每一个 H 不变 p' 截断上.

(b) G 是 p 闭的.

(c) $o(y) = p$, $\forall y \in H \backslash G$.

8.4 作用的分解

同 8.3 节中那样, 设 A 是一个作用在交换群 V 上的群. V 的自同态的集合连同映射的合成以及加法

$$v^{\alpha+\beta} := v^\alpha v^\beta \quad (\alpha, \beta \text{ 是自同态}, v \in V)$$

一起构成了一个环, 即 V 的自同态环 End V.

因为对每一个 $a \in A$, 映射

$$v \mapsto v^a \quad (v \in V)$$

是 V 的自同态, 所以能够合成 V 的自同态和 A 的元素在 V 上的作用

$$v^{a+\beta} := v^a v^\beta, \quad v^{\beta a} := (v^\beta)^a, \quad v^{a\beta} := (v^a)^\beta, \quad a \in A, \ \beta \in \text{End} V.$$

换句话说, 就是把 A 中的元素 a 和由 a 诱导的 End V 的元素等同起来.

例如, 对 $a \in A$, **换位映射** (commutator mapping)

$$\kappa : v \mapsto [v, a] =^* v^a v^{-1} = v^{a-\text{id}}, \quad v \in V$$

是具有 Ker $\kappa = C_V(a)$ 和

$$\text{Im}\kappa = \{[v, a] | v \in V\} = [V, a]②$$

的自同态 $a - \text{id}$. 因为在 $\langle a \rangle$ 下 $[V, a]$ 是不变的, 且商群 $V/[V, a]$ 被 $\langle a \rangle$ 中心化, 所以

$$\text{Im}\kappa = [V, \langle a \rangle].$$

① 用 Frobenius 定理 4.1.6.

* 原书此处有误. —— 译者注

② 注意: $[V, a] = \langle [v, a] | v \in V \rangle$.

于是由同态定理得

8.4.1　$V/C_V(a) \cong [V, \langle a \rangle]$. □

下一个结果和下面的 8.4.5 是 Gaschütz 定理 (见 3.3.2) 的推论. 但它们在这个定理之前很久就有了, 并且都有简短的初等证明, 将在这里给出.

8.4.2　假设 A 在 V 上的作用是互素的, 则

$$V = C_V(A) \times [V, A].$$

证明　由 8.2.7(a), 只需证明 $C_V(A) \cap [V, A] = 1$. 为此, 研究同态

$$\varphi : V \to V, \text{ 其中, } v \mapsto \prod_{x \in A} v^x.$$

对换位子 $v = [w, a] \in [V, A]$ 有

$$v^\varphi = (w^a)^\varphi w^{-\varphi} = \left(\prod_{x \in A} w^{ax}\right)\left(\prod_{x \in A} w^{-x}\right) = 1.$$

于是 $[V, A] \leqslant \operatorname{Ker} \varphi$. 另一方面, 对 $v \in C_V(A)$ 有 $v^\varphi = v^{|A|}$ 且由 $(|A|, |V|) = 1$ 得

$$v^{|A|} = 1 \Leftrightarrow v = 1.$$

因此对 $v \in C_V(A) \cap [V, A]$ 有 $v = 1$. □

作为推论得到

8.4.3　假设 A 在 V 上的作用是互素的, 且 A 平凡地作用在 $\Omega(V)$ 上. 那么 A 平凡地作用在 V 上.

证明　8.4.2 中的分解给出了

$$\Omega([V, A]) \leqslant C_V(A) \cap [V, A] = 1,$$

这蕴含了 $[V, A] = 1$. □

下面是由 8.4.2 得到的另一个结论, 它将在第 10 章中用到:

8.4.4　假设群 A 在群 G 上的作用是互素的, 且 $|G : C_G(A)| = p$ $(p \in \mathbb{P})$. 那么 $[G, A]$ 的阶为 p 且 $A/C_A(G)$ 为循环.

证明　设 $G_1 := [G, A]$. 从 8.2.7 得

$$G = G_1 C_G(A) \text{ 且 } G_1 = [G_1, A],$$

所以 $|G_1 : C_{G_1}(A)| = p$ 且 $C_A(G_1) = C_A(G)$. 如果 $G_1 < G$, 则结论由对 $|G|$ 的归纳法得到. 因此可以假设

(∗) $G=[G,A]$.

设 G_p 是 G 的 A 不变 Sylow p 子群 (见 8.2.3(a)). 由假设得 $G=G_pC_G(A)$, 于是 $G=[G,A]=[G_p,A]$. 特别地, G 是 p 群.

对 $\overline{G}:=G/\Phi(G)$, 从 (∗) 得到

$$[\overline{G},A]=\overline{G}.$$

但是 $\overline{G}$ 是交换的 (见 5.2.7), 由 8.4.2 知

$$\overline{G}=[\overline{G},A]\times C_{\overline{G}}(A).$$

因此 $C_{\overline{G}}(A)=1$, 而假设 $|G:C_G(A)|=p$ 蕴含 $|\overline{G}|=p$. 于是, 5.2.7(b) 表明 G 是循环的且由 8.4.3 得 $|G|=p$. 再由 39 页 2.2.4 得出结论. □

类似于 8.4.2 的研讨, 有

8.4.5 假设群 A 在群 V 上的作用是互素的. 设 U 是 V 的 A 不变子群. 如果 U 在 V 中有补, 那么 U 在 V 中也有一个 A 不变补.

证明 设 W 是 U 在 V 中的补, 即

$$V=U\times W.$$

如果 $V=U$, 那么 W 显然是 A 不变的. 于是, 假设 $V\neq U$. 投射

$$\eta: V\to U,\ 其中,\ uw\mapsto u\ (u\in U,\ w\in W)$$

是 V 的一个自同态, 因此也有 η_A 为 V 的自同态:

$$\eta_A: V\to V,\ 其中,\ v\mapsto \prod_{x\in A} v^{x^{-1}\eta x}.$$

而 $U^A=U$ 蕴含了

$$u^{\eta_A}=\prod_{x\in A} u^{x^{-1}x}=u^{|A|},\quad u\in U$$

且如同 8.4.2 中证明那样, 由 A 的互素作用知

$$\mathrm{Ker}\ \eta_A\cap U=1.$$

另一方面, $\mathrm{Im}\ \eta\leqslant U$ 且由 1.2.5 得

$$|\mathrm{Ker}\ \eta_A||\mathrm{Im}\ \eta_A|=|V|.$$

因此, 对于 $a\in A$ 有

$$\eta_A a=\sum_{x\in A}(x^{-1}\eta x)a=\sum_{x\in A} aa^{-1}x^{-1}\eta xa=a\sum_{x\in A}(xa)^{-1}\eta(xa)=a\eta_A\text{①}.$$

---

① 这个计算是在自同构环中进行的.

于是 $\mathrm{Ker}\,\eta_A$ 是 U 在 V 中的 A 不变补. □

如果 V 的每一个 A 不变子群在 V 中都有一个 A 不变补, 则称 A 在 V 上的作用是**半单的** (semisimple). 显然, 每一个不可约作用也是半单的.

假设 V 是一个交换 p 群. 如果 $V \neq \Omega(V)$, 则因 $\Omega(V)$ 在 V 中没有补而得 A 在 V 上的作用不是半单的. 另一方面, 如果 $V = \Omega(V)$, 那么 V 的每一个子群在 V 中都有补 (见 34 页 2.1.2)①. 因此, 8.4.5 给出

8.4.6 Maschke 定理② 假设 A 在 V 上的作用是互素的, 且 V 是初等交换群, 则 A 在 V 上的作用是半单的. □

V 的极小 A 不变子群是半直积 AV 的包含于 V 中的极小正规子群. 因此 29 页 1.7.2 用于此情形有

8.4.7 设 $\mathcal{M}$ 是 V 的所有极小 A 不变子群的集合. 那么下面的论述等价:

(i) A 在 V 上的作用是半单的.

(ii) 存在 $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{M}$ 使 $V = U_1 \times \cdots \times U_n$.

(iii) $V = \prod_{U \in \mathcal{M}} U$.

证明 (ii) $\Rightarrow$ (iii) 是显然的, 而 (i) $\Rightarrow$ (ii) 可由对 $|V|$ 用归纳法直接证明.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 设 U_1 是 V 的 A 不变子群. 由 1.7.2(a), 存在 $U_2, \cdots, U_n \in \mathcal{M}$ 使 $V = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$. 因此 $U_2 \times \cdots \times U_n$ 是 U_1 在 V 中的 A 不变补. □

A 在 V 上的半单作用诱导了 A 在 V 的每一个 A 不变子群上的半单作用 (见习题 2). 但如果把这个作用限制到 A 的子群上, 那么情况会变得较复杂. 对正规子群来说, 产生的作用还是半单的, 但对一般的子群来说并非如此 (见习题 1).

讨论这一基本事实并建议读者把下面的研讨和 31 页 1.8 中介绍的 (V 的)A 合成列的记法加以比较.

从现在开始, 假设 $V \neq 1$. 同上 $\mathcal{M}$ 是 V 的极小 A 不变子群的集合. 对 $U, W \in \mathcal{M}$, 定义

$$U \sim W \Leftrightarrow U \text{ 和 } W \text{ 是 } A \text{ 同构的}.$$

那么 $\sim$ 是在 $\mathcal{M}$ 上的等价关系. 记这些等价类为 $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n$. 对 $i = 1, \cdots, n$, 设

$$V_i := \prod_{U \in \mathcal{M}_i} U, \quad V_0 := \prod_{i=1}^{n} V_i.$$

子群 $V_i, i = 1, \cdots, n$, 称为 V 的**齐次 A 分支** (homogeneous A-components). 从 29 页 1.7.2 和 8.4.7 得到

8.4.8 (a) V_i 是 $\mathcal{M}_i$ 中子群的直积 ($i = 1, \cdots, n$).

---

① 根据 2.1.8, 有限维向量空间的每一个子空间都有补, 这是一个众所周知的事实.

② 对照文献 [76].

(b) $V_0 = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} V_i$.

(c) A 在 V_0 上的作用是半单的. □

由 8.4.7, A 在 V 上的作用是半单的当且仅当 $V = V_0$.

8.4.9 Clifford 定理[①] 设 H 是作用在 V 上的群, A 是 H 的正规子群. 假设 H 在 V 上的作用是半单的. 那么 A 在 V 上的作用也是半单的. 又若 H 不可约地作用在 V 上, 则 H 传递地作用在 V 的齐次 A 分支上, 且 $AC_H(A)$ 包含在这个作用的核中.

证明 对于 A 在 V 上的作用, 用以前所采用的记号. 因为 A 在 H 中正规, 所以 H 作用在 $\mathcal{M}$ 上. 证明在 $\mathcal{M}$ 的等价关系 $\sim$ 上保持这个作用:

设 $U, W \in \mathcal{M}$ 使得 $U \sim W$ 且 $h \in H$. 由定义, 存在一个 A 同构 $\varphi : U \to W$. 于是

$$\varphi^h := h^{-1}\varphi h^{②}$$

是从 U^h 到 W^h 中的同构, 且 $A^h = A$ 蕴含了

$$\varphi^h a = h^{-1}\varphi h a = h^{-1}\varphi a^{h^{-1}} h = h^{-1} a^{h^{-1}} \varphi h = a h^{-1}\varphi h = a\varphi^h.$$

因此 φ^h 是一个 A 同构且 $U^h \sim W^h$.

证明了 H 作用在 $\sim$ 的等价类上, 从而 H 作用在齐次 A 分支 $V_1, \cdots, V_n$ 的集合上. 这个作用的核包含 $AC_H(A)$.

子群 $V_0 = \prod_{i=1}^{n} V_i$ 是 H 不变的, 且 V 的每一个 H 不变子群包含 $\mathcal{M}$ 的某一个元素. 于是, 由 H 在 V 上的半单作用得到 $V = V_0$, 从而 A 在 V 上的作用是半单的 (见 8.4.7).

假设 H 不可约地作用在 V 上, 则 $V = (V_1^H)$, 而由 8.4.8(b) 得到

$$V_1^H = \{V_1, \cdots, V_n\}.$$ □

习 题

设 A 是作用在初等交换 p 群 V 上的群.

1. 假设对 A 的每一个子群 U 都有 U 在 V 上的作用是半单的, 则 $p \notin \pi(A/C_A(V))$.

2. 假设 A 在 V 上的作用是半单的, 且 W 是 V 的 A 不变子群. 那么 A 在 W 上的作用也是半单的.

3. 设 $S \in \mathrm{Syl}_p A$ 且 $L \trianglelefteq\trianglelefteq A$. 如果 $[C_V(S), A] = 1$, 那么

$$[C_V(S \cap L), L] = 1.$$

---

① 对照文献 [39].

② 这个乘积是在 End V 中进行的.

4. 设 $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ 是 $\mathbb{F}_2$ 上的 n 维向量空间. 对称群 S_n 按照

$$v_i{}^g := v_{i^g} \quad (g \in S_n,\ i \in \{1, \cdots, n\})$$

作用在 V 上.

问: 对什么样的 n 这个作用是半单的?

8.5 极小非平凡作用

本节研究在用归纳法证明中会经常出现的情形: 群 A 非平凡地作用在群 G 上, 但平凡地作用在 G 的每一个 A 不变真子群上. 如果再假设 A 在 G 上的作用是互素的, 那么就能够很好地描述 G 的结构. 显然, 对每一个 $p \in \pi(G)$, 因为 A 正规化 G 的一个 Sylow p 子群, 此时 G 为 p 群 (见 140 页 8.2.3). 这种情形的分析 (在文献中称为 Hall-Higman 化简) 将在 8.5.1 中给出①.

本节的第 2 个结果 (见 8.5.3) 是 $P \times Q$ 引理的一个推广, 就 $P \times Q$ 引理自身而言, 它是由 Thompson 给出的. 证明来自于 Bender, 他所用的一个很好的想法, 可以追溯到 Baer 的工作.

除了这两个定理外, 本节也证明了以后要用到的一些具体结果.

出于使用的原因, 把 Hall-Higman 化简改为较一般的形式:

8.5.1 设群 B 作用在 p 群 P 上. 假设 B 包含一个正规 p' 子群 A, A 非平凡地作用在 P 上, 但平凡地作用在 P 的每一个真 B 不变子群上. 那么 $P = [P, A]$ 且 P 或是初等交换群, 或为特殊 p 群, 并且 B 不可约地作用在 $P/\Phi(P)$ 上. 进一步, 若 $p \neq 2$, 则 $x^p = 1$, $\forall x \in P$.

证明 因为 $A \trianglelefteq B$, 子群 $[P, A]$ 是 B 不变的, 且由 8.2.7 得 $[P, A, A] = [P, A]$. 由此得到

(1) $P = [P, A]$.

P 的每一个特征子群 C 是 B 不变的. 因此 $[C, A] = 1$ 或 $C = P$. 特别地, 有

$$[P', A] = 1 = [\Phi(P), A].$$

设 $\overline{P} := P/P'$. A 在 P 上的互素作用和 8.4.2 蕴含了

$$\overline{P} = [\overline{P}, A] \times C_{\overline{P}}(A) = \overline{[P, A]} \times C_{\overline{P}}(A),$$

从而由 (1) 得 $C_{\overline{P}}(A) = 1$. 于是 A 在每一个真 B 不变子群上的平凡作用表明 B 不可约地作用在 $\overline{P}$ 上. 特别地, 对 P 的每一个真特征子群 C 有 $\overline{C} = 1$. 因此 $P' \leqslant \Phi(G)$ 蕴含

$$P' = \Phi(P).$$

① 见文献 [67].

如果 $P' = 1$, 那么 P 是初等交换的, 得到结论. 于是可假设 $P' \neq 1$, 则 $Z(P) \neq P$, 而因 $Z(P)$ 是 P 的特征子群, 有 $Z(P) \leqslant P'$. 从 (1) 和三子群引理得

$$[P, P', A] = 1 = [P', A, P].$$

于是有

$$[P, P'] = [P, A, P'] = 1,$$

得出包含关系 $P' \leqslant Z(P)$, 从而得到 $Z(P) = P'$. 因为 $P/Z(P)$ 是初等交换的, 对每一个 $x, y \in P$ 有

$$1 = [x^p, y] \overset{1.5.4}{=} [x, y]^p.$$

因此 $Z(P) = P' = \Omega(Z(P))$, P 是特殊 p 群.

设 $p \neq 2$. 那么由 5.3.4(a) 得到对 $x \in P$ 和 $a \in A$ 有

$$[x, a]^p = (x^{-1}x^a)^p = x^{-p}(x^p)^a = x^{-p}x^p = 1,$$

所以 $P = [P, A] = \Omega(P)$. 再利用 5.3.5, 得到结论. □.

下述的结果研讨了将在第 11 章中要出现的情形:

8.5.2 设 A 是交换 p 群且作用在 p' 群 G 上, 令 $A_0 := C_A(G)$. 假设 $[G, A] \neq 1$, 但是对 G 的每一个 A 不变子群 $U (U \neq G)$ 有 $[U, A] = 1$, 则

(a) $r(A/A_0) = 1$.

(b) 如果半直积 AG 作用在初等交换 p 群 V 上, 使得 $C_G(V) = 1$, 那么 AG/A_0 忠实地作用在 $C_V(A_0)$ 上.

证明 (a) 在本节的引言中已提到, 此时 G 是一个 q 群 $(q \in \mathbb{P})$. 由 8.5.1 和 8.2.9(a) 得商群 A/A_0 不可约且忠实地作用在 $G/\Phi(G)$ 上, 所以从 8.3.3 得到 (a).

(b) 令 $K := C_{AG}(C_V(A_0))$. $P \times Q$ 引理 (见 8.2.8, 其中, $P = A_0$) 证明了 K 是 p 群. 因 $A_0 \leqslant K$ 且 G 是 p' 群, 得到 $K = A_0$. □

对 $p \neq 2$, 下面的结果是 $P \times Q$ 引理的一个重要的推广:

8.5.3 定理 (Thompson, [93]) 设 $p \neq 2$ 且 A 是 p 子群 P 和正规 p' 子群 Q 的半直积. 假设 A 作用在 p 群 G 上, 使得

(′) $C_G(P) \leqslant C_G(Q)$,

则 Q 平凡地作用在 G 上.

证明 (Bender, [27]) 可假设 $[G, Q] \neq 1$. 因为 G 的每一个 A 不变真子群也满足 (′) (替换 G), 对 $|G|$ 用归纳法, 可进一步假定 Q 平凡地作用在每一个这样的真子群上. 因此由 8.5.1 得到

$$G = [G, Q] \text{ 且 } G' \leqslant Z(G).$$

首先研讨 $G' = 1$ 的情形.

8.4.2 给出了 $C_G(Q) = 1$, 从而由假设 (′) 也有 $C_G(P) = 1$. 于是从 8.1.4 推出 $G = 1$, 这和 $[G, Q] \neq 1$ 矛盾.

下面用 Baer 的想法①来证明 $G' \neq 1$ 的情形. 这要通过在集合 G 上定义加法而得到, G 关于这个加法构成一个交换群, 并且和 A 的作用相容. 这样就从刚才研讨的情形得到结果.

因为 G 是奇阶的, 故对每一个 $x \in G$ 有 $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle$. 特别地, 对 $x, y \in G$ 有

$$x^2 = y^2 \Rightarrow x^2y^{-2} = (xy^{-1})^2 = 1 \Rightarrow xy^{-1} = 1,$$

从而有

$$x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y.$$

因此, 对每一个 $g \in G$ 存在唯一的 $x \in G$ 使得 $x^2 = g$. 令

$$\sqrt{g} := x,$$

则以下结果成立:

$g, h \in Z(G) \Rightarrow \sqrt{g}, \sqrt{h} \in Z(G)$ 且 $\sqrt{gh} = \sqrt{g}\sqrt{h}$,

$g \in G, a \in A \Rightarrow \sqrt{g}^a = \sqrt{g^a}$,

$g \in G \Rightarrow g^{-1}\sqrt{g} = \sqrt{g^{-1}}$.

现在定义集合 G 上的加法为

(+) $g + h := gh\sqrt{[h, g]}$.

换位子等式 $[g, h]^{-1} = [h, g]$ 蕴含了

$$g + h = gh\sqrt{[h, g]} = hg[g, h]\sqrt{[g, h]} = hg[g, h]\sqrt{[g, h]^{-1}} = hg\sqrt{[g, h]} = h + g.$$

因此这个加法是交换的.

用 $G' \leqslant Z(G)$ 证明 + 满足结合律: 对 $g, h, f \in G$(见 27 页 1.5.4) 有

$$[f, g + h] = [f, gh] = [f, g][f, h] \text{ 且}$$
$$[h + f, g] = [hf, g] = [h, g][f, g].$$

这证明了

$$(g + h) + f = ghf\sqrt{[h, g]}\sqrt{[f, g]}\sqrt{[f, h]} = g + (h + f).$$

显然 1 是 $G(+)$ 的单位元且 $-g := g^{-1}$ 是 g 的逆元 (关于 +). 因此, $G(+)$ 是交换群.

---

① Bender 用这个方法到此种情形 (见文献 [24], [27]).

因为

$$(g+h)^a = g^a h^a \sqrt{[h^a, g^a]} = g^a + h^a,$$

其中, A 在集合 G 上的作用同前, 所以群 A 作用在交换群 $G(+)$ 上. 于是由上面研讨过的交换情形证明了 Q 平凡地作用在 G 上. □

下面的两个结果将在 8.5.6 的证明中用到, 并且这个结果在 11 章中用来证明 Glauberman 的信号函子定理.

8.5.4 设 P 是使得 $\Omega(P) = Z(P)$ 且 $|P'| = 4$ 的特殊 2 群, 则 $2^3 \leqslant |P/Z(P)| \leqslant 2^4$.

证明 设 $Z := Z(P)$ 且 $2^n := |P/Z|$. 因为 P 是特殊的, 有 $P' = Z = \Phi(P)$, 且由假设得 $P' = \Omega(P)$, $|P'| = 4$. 特别地, $P \backslash Z$ 中每一个元素都是 4 阶元. 如果 $n = 2$, 则存在 $x, y \in P$ 使得 $P = \langle x, y, Z(P) \rangle$. 因此 $P' = \langle [x,y] \rangle \cong C_2$, 这和 $|P'| = 4$ 矛盾. 于是有 $n \geqslant 3$.

设 $a \in P \backslash Z$ 且令

$$C := C_P(a), \quad \overline{C} := C/\langle a \rangle.$$

注意到, 因 $1 \neq a^2 \in Z$ 而有 $|\overline{Z}| = 2$. 取 $x \in C$ 使 $\overline{x}$ 是一个对合. 当 $\overline{x} \notin \overline{Z}$ 时, 元素 x 的阶为 4 且 $x^2 \in \langle a \rangle$, 即 $x^2 = a^2$. 因此 $o(xa) = 2$, 这和 $\Omega(P) = Z$ 且 $xa \notin Z$ 矛盾.

已经证明了 $\overline{Z}$ 是 $\overline{C}$ 的唯一的 2 阶子群. 于是由 90 页 5.3.7 得到 $\overline{C}$ 或是循环群 (阶 $\leqslant 4$) 或为 8 阶四元数群. 这给出

$$|C| \in \{8, 16, 32\}.$$

另一方面, 因为 $\langle a \rangle Z$ 在 P 中正规, 所以共轭类 a^P 包含在 aZ 中. 由此推出

$$|P/C| = |a^P| \leqslant |aZ| = 4.$$

于是 $|P| \leqslant 2^7$, 即 $|P/Z| \leqslant 2^5$.

当 $|P/C| \leqslant 2$ 时, 有 $|P| \leqslant 2^6$, 所以 $|P/Z| \leqslant 2^4$, 得到结论. 因此只要证明假定

(+) $|P : C_P(a)| = 4$, $\forall a \in P \backslash Z$ 且 $|P/Z| = 2^5$

导致矛盾. 设 $z \in Z^\#$, $\widetilde{P} := P/\langle z \rangle$[①]. 那么

$$\Phi(\widetilde{P}) = \widetilde{P}' = \widetilde{Z} \cong C_2.$$

如果 $\widetilde{Z} = Z(\widetilde{P})$, 则 $\widetilde{P}$ 是超特殊的, 而 $|\widetilde{P}/\widetilde{Z}|$ 是平方数 (见 5.2.9), 和 (+) 矛盾.

---

① 这里用 $\sim$ 取代上划线记号.

假设 $\widetilde{Z} \neq Z(\widetilde{P})$. 那么存在 $a \in P\backslash Z$ 使得 $\widetilde{a} \in Z(\widetilde{P})$, 因此

$$\{x^{-1}x^a | x \in P\} = \{1, z\}.$$

于是由 8.1.7 得 $|P : C_P(a)| = 2$, 这也和 (+) 矛盾. □

8.5.5　设 $\langle d \rangle$ 是一个循环 3 群, 且忠实无不动点地作用在 2 群 P 上. 假设

(+) 对 P 的每一个交换子群 V, 有 $r(V) \leqslant 2$.

那么 $o(d) = 3$.

证明　设 $o(d) = 3^n$. 对 $|P|$ 用归纳法, 可假设 $\langle d^3 \rangle$ 平凡地作用在 P 的每一个 $\langle d \rangle$ 不变真子群上. 因此 8.5.1 表明 $\langle d \rangle$ 不可约地作用在

$$\overline{P} := P/\Phi(P)$$

上, 且 P 是初等交换群或特殊 p 群, 并且由 8.2.9(a), $\langle d \rangle$ 也忠实地作用在 $\overline{P}$ 上. 因此, 对所有的 $1 \neq x \in \langle d \rangle$ 有 $C_{\overline{P}}(x) = 1$. 特别地, $\langle d \rangle$ 在 $\overline{P}^{\#}$ 上的每一个轨道的长为 $o(d) = 3^n$. 这给出了

(1) $|\overline{P}| \equiv 1 \pmod{3^n}$.

因为 $Z(P)$ 是初等交换群, 所以由 $\langle d \rangle$ 的无不动点作用得到 $|Z(P)| \geqslant 4$. 而由 (+) 推出

(2) $|Z(P)| = 4$ 且 $\Omega(P) = Z(P)$.

情形 $P' = 1$ 给出 $|P| = 4$, 而因 $\langle d \rangle$ 忠实地作用在 P 上, 得 $o(d) = 3$.

余下的情形为 P 是特殊群且满足 8.5.4 的假设 (见 (2)). 由此得到 $|\overline{P}| = 2^3$ 或 $|\overline{P}| = 2^4$. 因此由 (1) 得 $|\overline{P}| = 2^4$ 且 $n = 1$. □

8.5.6　设 G 是群且 $1 \neq d$ 是 G 的一个 3 元素. 假设下面条件成立:

(1) $C_G(O_2(G)) \leqslant O_2(G)$.

(2) G 中存在 6 阶元素.

(3) G 中存在一个 $\langle d \rangle$ 不变的初等交换 2 子群 W, 使得

$$C_W(d) = 1 \neq W,$$

则 G 包含一个 8 阶的初等交换子群.

证明　设

$$P := O_2(G),\ Z := \Omega(Z(P)) \text{ 且 } C := C_G(Z).$$

假设 G 是一个反例, 则有

(+) 对 G 的每一个交换 2 子群有 $r(V) \leqslant 2$.

这表明了 $|Z| \leqslant 4$ 且 $|WC_Z(W)| \leqslant 4$. 因为 d 正规化 W 和 Z, 且无不动点地作用在 W 上, 得

$$W = Z \cong C_2 \times C_2 \text{ 且 } C_Z(d) = 1.$$

设 $D \in \mathrm{Syl}_3 G$ 使得 $d \in D$, 且取 $x \in D$. 如果 $[Z,x] \neq 1$, 则因 $|Z| = 4$ 而有 $C_Z(x) = 1$, 从而由 (+) 得到 $C_P(x) = 1$. 因此 P 和 x 满足 8.5.5 的假设. 得到

(*) 对所有的使得 $[Z,x] \neq 1$ 的 $x \in D$, 有 $C_P(x) = 1$ 且 $o(x) = 3$.

首先假设 D 是循环的. 那么由 (*) 得 $D = \langle d \rangle \cong C_3$, 而由假设 (2) 和 Sylow 定理可证存在对合 $t \in G$, 使得 $[t,d] = 1$. 因为 $Z\langle t \rangle$ 是幂零的, 得 $|[Z,t]| \leqslant 2$ (见 5.1.6). 于是从 $[Z,t]$ 是 $\langle d \rangle$ 不变的推出 $[Z,t] = 1$, 并且 t 不包含在 Z 中, 所以 $Z\langle t \rangle$ 是 8 阶初等交换群. 这和 (+) 矛盾.

假设 D 非循环. 那么 $C_D(Z)$ 是 D 的非平凡正规子群. 设 b 是 $C_D(Z) \cap Z(D)$ 中的 3 阶元且 $E := \langle b, d \rangle$. 由 (*) 得 E 是 9 阶初等交换子群. 因此由 8.3.4 得

$$P = \langle C_P(x) | x \in E^{\#} \rangle.$$

进一步, 再由 (*) 得对所有的 $x \in E \backslash \langle b \rangle$ 有 $C_P(x) = 1$. 于是 $P = C_P(b)$, 这和假设 (1) 矛盾. □

习 题

1. 设 G 是群. 假设 G 的每一个真子群都是幂零的, 但 G 不幂零. 那么存在不同的素数 p, r 和 p 元 $a \in G$ 使得

$$G = F(G)\langle a \rangle \text{ 且 } F(G) = \langle a^p \rangle \times R,$$

其中, R 是初等交换群或特殊 r 群.

8.6 线性作用和 2 维线性群

本节介绍群在向量空间上的作用. 作为这种作用的例子, 给出群 $\mathrm{GL}_2(q)$ 和 $\mathrm{SL}_2(q)$, 而在下一章中也需要 $\mathrm{SL}_2(q)$ 的一个重要性质.

设 p 是一个素数. 众所周知, 对每一个 p 的方幂

$$q = p^m \quad (m \in \mathbb{N})$$

恰存在一个域 (在同构的意义下)$\mathbb{F}_q$, 使得 $|\mathbb{F}_q| = q$. 设

$$K := \mathbb{F}_q.$$

加群 $K(+)$ 是初等交换 p 群, 而乘群 K^* 是循环群, 见 8.3.3 后的评注.

设 V 是 K 上的 n 维向量空间. 那么加群 $V(+)$ 是 q^n 阶的初等交换 p 群.

又设 $\mathrm{GL}(V)$ 是向量空间 V 的自同构群, 即

$$\mathrm{GL}(V) = \{x \in \mathrm{Aut}\ V(+) |\ \text{对所有的 } v \in V \text{ 和 } \lambda \in K \text{ 有 } \lambda v^x = (\lambda v)^x\}.$$

如果 G 作用在交换群 $V(+)$ 上, 于是 $\mathcal{O}_1 \sim \mathcal{O}_3$ 成立. 此外, 若有

$\mathcal{O}_4$ $(\lambda v)^g = \lambda v^g$ $(\lambda \in K, v \in V, g \in G)$,

则称群 G **作用在向量空间** (act on the vector space) V 上.

任何这样的一个作用都产生一个从 G 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的同态, 它描述了 G 在 V 上的作用.

如果 $V \neq 0$ 且 0 和 V 是 V 仅有的 G 不变子空间, 则称 G 在 V 上的作用是**不可约的** (irreducible)①.

8.6.1 Schur 引理 假设 G 不可约且忠实地作用在 K 向量空间 V 上, 则下面的结论成立:

(a) $Z(G)$ 是循环 p' 群.

(b) 如果 $|Z(G)| = n$ 使 $n|(q-1)$, 那么存在单同态 $\varphi : Z(G) \hookrightarrow K^*$, 使得

$$\text{对所有的 } z \in Z(G),\ v \in V \text{ 有 } v^z = z^\varphi v^{②}.$$

证明 设 $Z := Z(G)$, $z \in Z^\#$. 那么 $C_V(z)$ 是 V 的真 G 不变子空间. G 的不可约作用给出对所有的 $z \in Z^\#$ 有 $C_V(z) = 0$. 于是从 8.3.2 和 8.1.4 得到 (a).

(b) 对 $\lambda \in K^*$, 映射

$$Z_\lambda : V \to V, \text{ 其中}, v \mapsto \lambda v$$

在 $Z(GL(V))$ 中且 $M := \{z_\lambda | \lambda \in K^*\}$ 是 $Z(\mathrm{GL}(V))$ 的同构于 K^* 的子群.

因为 G 忠实地作用在 V 上, 这个作用由 G 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的同态所描述. 把 G 的元素和它们在 $\mathrm{GL}(V)$ 中的像等同, 则可把 G 从而 Z 也看成是 $\mathrm{GL}(V)$ 的子群. 于是 $H := MZ$ 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的被 G 中心化的交换子群. 由 G 在 V 上的不可约作用得

$$\text{对所有的 } h \in H^\#, \text{ 有 } C_V(h) = 0.$$

如上所述, 这证明了 H 是循环的. 特别地, H 恰含一个 $|Z|$ 阶的子群 (见 18 页 1.4.3). 进一步, 因为 n 整除 $|K^*|$ 而得到的这个子群在 $M(\cong K^*)$ 中, 从而得出 $Z \leqslant M$. □

应该指出, 用和 8.4 节中同样的论证, 对群作用在向量空间上可证明和 8.4 节中的那些定理类似的分解定理, 特别是 Maschke 定理和 Clifford 定理. 当然, 现在的不可约性和半单性是指子空间而言而不是指子群.

众所周知, 把 $\mathrm{GL}(V)$ 每一个元素 x 对应到它的行列式 $\det x$ 的映射

$$\det : \mathrm{GL}(V) \to K^*$$

---

① 一般来说, 这并不意味着 G 在 $V(+)$ 上的作用是不可约的.

② z 通过纯量乘法作用.

是一个满同态. 因此

$$\mathrm{SL}(V) := \{\boldsymbol{x} \in \mathrm{GL}(V) | \det \boldsymbol{x} = 1\}$$

是 GL(V) 的正规子群, 且使得

$$\mathrm{GL}(V)/\mathrm{SL}(V) \cong K^*.$$

因为 $(q-1,p)=1$, 所以 GL(V) 的所有的 p 元包含在 SL(V) 中, 将常常用到这个事实.

对于 V 的固定的基 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$, 每一个 $\boldsymbol{x} \in GL(V)$ 都对应一个可逆矩阵

$$\boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix},$$

其中, $\lambda_{ij} \in K$ 由下面的方程所确定:

$$\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{x}} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \boldsymbol{v}_j, \quad j = 1, \cdots, n.$$

映射 $\boldsymbol{x} \mapsto A(\boldsymbol{x})$ 是一个由 GL(V) 到 K 上的所有 $n \times n$ 可逆矩阵组成的群 $\mathrm{GL}_n(q)$ 的同构. 特别地, SL(V) 映射到由所有行列式值为 1 的矩阵组成的群 $\mathrm{SL}_n(q)$ 上.

常把元素 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{GL}(V)$ 用矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 描述 (对 V 的一个固定的基) 记为

$$\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}).$$

尽管下面的大多数结果都可容易地推广到 n 维向量空间上, 但从现在起假定 V 是 K 上的 2 维向量空间.

GL(V) 的阶等于有序对 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ 的个数, 其中, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ 是 V 的一个基. 因此

$$|\mathrm{GL}_2(q)| = |\mathrm{GL}(V)| = (q^2-1)(q^2-q)$$

且

$$|\mathrm{SL}_2(q)| = |\mathrm{SL}(V)| = (q-1)q(q+1).$$

对 $\lambda \in K^*$, 由 λ 诱导的纯量乘法

$$\boldsymbol{z}_\lambda : V \to V, \text{ 其中, } \boldsymbol{v} \mapsto \lambda \boldsymbol{v}$$

是 $Z(\mathrm{GL}(V))$ 的元素, 且对于 V 的每一个基有

$$\boldsymbol{z}_\lambda \equiv \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

令

$$Z := \{z_\lambda | \lambda \in K^*\} \ (\leqslant Z(\mathrm{GL}(V))),$$

显然 Z 同构于 K^*, 并且只有 $\lambda = \pm 1$ 时 $z_\lambda \in \mathrm{SL}(V)$. 设

$$z := z_{-1}.$$

如果 $p = 2$, 那么 $z = 1$. 如果 $p \neq 2$, 那么 z 是 $\mathrm{SL}(V)$ 中的一个对合.

8.6.2　设 $p \neq 2$, 则 z 是 $\mathrm{SL}(V)$ 中唯一的对合.

证明　设 $t \in \mathrm{SL}(V)$ 是一个对合. 那么对所有的 $v \in V$ 有

$$v + v^t \in C_V(t).$$

如果 $C_V(t) = 0$, 则 $v^t = -v$, 从而 $t = z$. 假设 $C_V(t) \neq 0$. 那么存在 V 的基 v, w 使得 $v \in C_V(t)$, 且对于这个基有

$$t \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & -1 \end{pmatrix}.$$

但 $\det t = -1$, 这和 $p \neq 2$ 且 $t \in \mathrm{SL}(V)$ 矛盾. □

设 $V^\# := \{v \in V | v \neq 0\}$, $v \in V^\#$. 记

$$Kv := \{\lambda v | \lambda \in K\}$$

为 V 的由 v 生成的子空间. 设 v, w 是 V 的基, 即 $Kv \neq Kw$. 令①

$$\begin{aligned} \widehat{S}(v) &:= \{x \in GL(V) | (Kv)^x = Kv\} \\ &\equiv \left\{ \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ \lambda & \delta_2 \end{pmatrix} \middle| \delta_1, \delta_2 \in K^*, \lambda \in K \right\}, \\ \widehat{P}(v) &:= \{x \in GL(V) | v^x = v\} \\ &\equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & \delta_2 \end{pmatrix} \middle| \delta_2 \in K^*, \lambda \in K \right\}, \\ \widehat{D}(v, w) &:= \widehat{S}(v) \cap \widehat{S}(w) \equiv \left\{ \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \middle| \delta_1, \delta_2 \in K^* \right\}, \end{aligned}$$

---

① 对于基 v, w 而言.

$$S(v) := \widehat{S}(v) \cap SL(V) \equiv \left\{ \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ \lambda & \delta^{-1} \end{pmatrix} \middle| \delta \in K^*, \lambda \in K \right\},$$

$$P(v) := \widehat{P}(v) \cap SL(V) \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in K \right\},$$

$$D(v,w) := \widehat{D}(v,w) \cap SL(V) \equiv \left\{ \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} \middle| \delta \in K^* \right\}.$$

显而易见, 上面的集合都是 GL(V) 的子群. 现在讨论它们的结构:

8.6.3 (a) $\widehat{D}(v,w) \cong K^* \times K^*$ 且 $D(v,w) \cong K^*$. 特别地, $D(v,w)$ 是 $q-1$ 阶循环群.

(b) $P(v) \cong K(+)$.

(c) $P(v)$ 是 $\widehat{S}(v)$ 的正规子群且 $\widehat{S}(v)$(或 $S(v)$) 是 $P(v)$ 和 $\widehat{D}(v,w)$(或 $D(v,w)$) 的半直积. 特别地, $\widehat{S}(v)$ 和 $S(v)$ 都是可解群.

(d) 对 $x \in D(v,w)\backslash\langle z\rangle$ 有 $C_{P(v)}(x) = 1$ 和 $[P(v), x] = P(v)$①.

证明 大多数断言可根据子群的定义直接从矩阵表示得到. 对于 (c), 注意到 $\widehat{P}(v)$ 是 $\widehat{S}(v)$ 在 Kv 上作用的核. 因此 $\widehat{P}(v) \trianglelefteq \widehat{S}(v)$ 且 $P(v) \trianglelefteq S(v)$.
断言 (d) 可用

$$\begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta^{-2}\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

验证. 注意这里 $\delta^{-2} = 1 \Leftrightarrow \delta = \pm 1$. □

8.6.4 对 $v \in V^{\#}$ 有 $[V, P(v)] = Kv$ 且 $[V, P(v), P(v)] = 0$.

证明 $P(v)$ 的矩阵表示表明 $P(v)$ 平凡地作用在 V/Kv 上. 因此

$$0 \neq [V, P(v)] \subseteq Kv$$

且有 $[V, P(v), P(v)] = 0$. 因为 $[V, P(v)]$ 是 V 的子空间, 也得 $[V, P(v)] = Kv$. □

下面的结果描述了 GL(V)(也是 SL(V)) 的 Sylow p 结构.

8.6.5 (a) $\mathrm{Syl}_p\, \mathrm{GL}(V) = \{P(v) | v \in V^{\#}\}$ 且

$$P(v) = P(u) \Leftrightarrow Kv = Ku.$$

特别地, $|\mathrm{Syl}_p\, \mathrm{GL}(V)| = q+1$.

(b) $N_{GL(V)}(P(v)) = \widehat{S}(v)$, $v \in V^{\#}$.

(c) 如果 $Kv \neq Kv (v, u \in V^{\#})$, 那么 $P(v) \cap P(u) = 1$.

① 因此 $S(v)/\langle z\rangle$ 是 Frobenius 群, 见 8.1.12.

(d) 对使 $K\boldsymbol{v} \neq K\boldsymbol{u}$ 的 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V^{\#}$ 有 $\mathrm{Syl}_p\,\mathrm{GL}(V) = \{P(\boldsymbol{u})\} \cup \{P(\boldsymbol{v})^{\boldsymbol{x}} | \boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{u})\}$.

证明 显然, 因 $|P(\boldsymbol{v})| = q = p^m$ 得 $P(\boldsymbol{v})$ ($\boldsymbol{v} \in V^{\#}$) 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的 Sylow p 子群. 反之, $\mathrm{GL}(V)$ 的 Sylow p 子群作用在集合 V 上. 因为 $0^P = 0$, 所以由 47 页 3.1.7 得存在 $\boldsymbol{v} \in V^{\#}$ 使 $\boldsymbol{v}^P = \boldsymbol{v}$. 这蕴含了 $P \leqslant P(\boldsymbol{v})$, 从而 $P = P(\boldsymbol{v})$.

设 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V^{\#}$. 如果 $K\boldsymbol{v} \neq K\boldsymbol{u}$, 则因 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ 是 V 的基, 得

$$P(\boldsymbol{v}) \neq P(\boldsymbol{u}) \Leftrightarrow K\boldsymbol{v} \neq K\boldsymbol{u} \Leftrightarrow P(\boldsymbol{v}) \cap P(\boldsymbol{u}) = 1.$$

这推出 (c) 和 (a). 此处要注意到 $\dfrac{q^2-1}{q-1} = q+1$ 是子空间 $K\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v} \in K^{\#}$) 的个数. 因为 $P(\boldsymbol{v})^{\boldsymbol{x}} = P(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{x} \in \mathrm{GL}(V)$, 也得到 (b).

(d) $P(\boldsymbol{u})$ 由共轭作用在 $\mathrm{Syl}_p\,\mathrm{GL}(V)$ 上. 如果 $P(\boldsymbol{v})^{\boldsymbol{x}} = P(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{u})$, 则从 (b) 和 (c) 得 $x = 1$. 因此, 存在 $q = |P(u)|$ 个两两不同的 Sylow p 子群 $P(\boldsymbol{v})^x, x \in P(\boldsymbol{u})$. 连同 $P(\boldsymbol{u})$ 一起共有 $q+1$ 个 Sylow p 子群, 于是从 (a) 得到结论. □

下面收集了上面所介绍的子群之间关系的一些性质. 同前, 设 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 是 V 的基且对于这个基有 $\boldsymbol{t} \in \mathrm{SL}(V)$ 使得

$$\boldsymbol{t} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.6.6 (a) 对 $\boldsymbol{u} \in V \backslash (K\boldsymbol{v} \cup K\boldsymbol{w})$ 有

$$\widehat{S}(\boldsymbol{v}) \cap \widehat{S}(\boldsymbol{w}) \cap \widehat{S}(\boldsymbol{u}) = Z.$$

特别地, $Z(\mathrm{GL}(V)) = Z$ 且 $Z(\mathrm{SL}(V)) = \langle z \rangle$.

(b) $N_{\mathrm{GL}(V)}(\widehat{D}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})) = \langle t \rangle \widehat{D}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ 或者 $q = 2$ 且 $\widehat{D}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 1$.

(c) $N_{\mathrm{SL}(V)}(D(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})) = \langle t \rangle D(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ 或者 $q \leqslant 3$ 且 $D(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \langle z \rangle$.

(d) 对所有的 $x \in \widehat{D}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})t$ 有 $[\widehat{D}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), x] = D(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

(e) 对所有的 $a \in P(\boldsymbol{v})^{\#}$ 有 $C_{\mathrm{GL}(V)}(a) = P(\boldsymbol{v})Z(\mathrm{GL}(V))$.

证明 (a) 因为

$$Z \leqslant \widehat{S}(\boldsymbol{v}) \cap \widehat{S}(\boldsymbol{w}) \cap \widehat{S}(\boldsymbol{u}) =: H,$$

只要证明 $H \leqslant Z$ 就够了. 设 $\lambda_1, \lambda_2 \in K^*$ 使得

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v} + \lambda_2 \boldsymbol{w},$$

且设 $h \in H$, 则存在 $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in K^*$ 使得 $\boldsymbol{v}^h = \mu_1 \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}^h = \mu_2 \boldsymbol{w}$ 且 $\boldsymbol{u}^h = \mu_3 \boldsymbol{u}$. 由此得到

$$\mu_3 \lambda_1 \boldsymbol{v} + \mu_3 \lambda_2 \boldsymbol{w} = \mu_3 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^h = \lambda_1 \boldsymbol{v}^h + \lambda_2 \boldsymbol{w}^h = \lambda_1 \mu_1 \boldsymbol{v} + \lambda_2 \mu_2 \boldsymbol{w},$$

于是因 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 是基而有

$$\mu_3\lambda_1=\lambda_1\mu_1 \text{ 且 } \mu_3\lambda_2=\lambda_2\mu_2.$$

因此 $\mu_3=\mu_1=\mu_2$ 且 $h=z_{\mu_1}\in Z$.

(b) 和 (c) 对 $x\in N_{\mathrm{GL}(V)}(\widehat{D}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}))$ 有

$$\widehat{D}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=(\widehat{D}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}))^x=\widehat{D}(\boldsymbol{v}^x,\boldsymbol{w}^x).$$

于是 (a) 蕴含了 $\{K\boldsymbol{v},K\boldsymbol{w}\}=\{K\boldsymbol{v}^x,K\boldsymbol{w}^x\}$ 或 $\widehat{D}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=Z(\mathrm{GL}(V))$. 在第 1 种情形时, 由 $x\notin\widehat{D}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ 得

$$(K\boldsymbol{v})^x=K\boldsymbol{w},\quad (K\boldsymbol{w})^x=K\boldsymbol{v}$$

且 $tx\in\widehat{D}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$. 在第 2 种情形时,

$$\widehat{D}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\cong K^*\times K^* \text{ 和 } Z(GL(V))\cong K^*$$

推出 $\widehat{D}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=1$ 和 $q=2$.

用 $D(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ 替代 $\widehat{D}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$, 情形 $D(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=Z(\mathrm{SL}(V))$ 给出

$$q-1=|D(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|=|\langle z\rangle|\leqslant 2,$$

从而有 $q\leqslant 3$.

(d) 因为 $\widehat{D}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ 是交换的, 所以可以假设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}$. 对元素 $\boldsymbol{d}\equiv\begin{pmatrix}\delta_1 & 0\\ 0 & \delta_2\end{pmatrix}$ 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}^{-1}\boldsymbol{t}^{-1}\boldsymbol{d}\boldsymbol{t}&\equiv\begin{pmatrix}\delta_1^{-1} & 0\\ 0 & \delta_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1 & 0\\ 0 & \delta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\delta_1^{-1}\delta_2 & 0\\ 0 & \delta_2^{-1}\delta_1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

从而得到 (d).

(e) 因 $P(\boldsymbol{v})$ 是交换的, 显然有 $Z(\mathrm{GL}(V))P(\boldsymbol{v})\leqslant C_{\mathrm{GL}(V)}(a)$. 另一方面 $C_V(a)=K\boldsymbol{v}$, 于是有 $C_{\mathrm{GL}(V)}(a)\leqslant\widehat{S}(\boldsymbol{v})$. 于是从 8.6.3(c) 及一个简单的计算即得出 (e). □

8.6.7 设 P_1,P_2 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的两个不同的 Sylow p 子群. 那么

$$\mathrm{SL}(V)=\langle P_1,P_2\rangle.$$

证明 根据 8.6.5(a) 存在 V 的基 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 使得 $P_1=P(\boldsymbol{v})$ 且 $P_2=P(\boldsymbol{w})$. 由 8.6.3(c) 和 8.6.5(b) 有 $N_{SL(V)}P(\boldsymbol{v})=P(\boldsymbol{v})D(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$, 且由 8.6.5(d) 得到

$$G:=\langle P_1,P_2\rangle\ (\leqslant \mathrm{SL}(V))$$

是由 SL(V) 的所有 Sylow p 子群生成的群. 于是由 Frattini 论断得

$$\mathrm{SL}(V) = GD(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}).$$

因为 $D(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ 是交换的, t 平凡地作用在 SL(V)/G 上. 因此 8.6.6(d) 表明了 $D(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \leqslant G$, 故 $G =$SL(V). □

如果 $x \in$SL(V), $\boldsymbol{v} \in V^{\#}$ 使得 $\boldsymbol{v}^x = \boldsymbol{v}$, 则 x 是 p 元素 (见 8.6.3(b)). 这证明了

8.6.8 设 R 是 SL(V) 的 p' 子群. 那么对所有的 $x \in R^{\#}$ 有 $C_V(x) = 0$. □

8.6.9 设 $r \in \mathbb{P}, r \neq p$ 且 R 是 SL(V) 的 Sylow r 子群. 如果 $r \neq 2$, 则 R 为循环群, 如果 $r = 2$, 那么 R 是四元数群.

证明 由 8.6.8, 可用 8.3.2. 那么 R 是循环群或四元数群. 剩下只要排除 $r = 2$ 且 R 为循环的情形. 在这种情形下 SL(V) 有一个正规的 2 补 (见 7.2.2), 且这个 2 补包含了 SL(V) 的所有 Sylow p 子群. 于是得出 8.6.7 和 $R \neq 1$ 相互矛盾. □

$\mathrm{SL}_2(2)$ 是 6 阶的非交换群, 同构于 S_3.

$\mathrm{SL}_2(3)$ 是非 3 闭的 24 阶群 (见 8.6.5), 其 Sylow 2 子群 Q 是四元数群 (见 8.6.9), 且中心是 2 阶的 (见 8.6.6(a)). 因此 72 页 4.3.4 表明了 Q 是 $\mathrm{SL}_2(3)$ 的正规子群.

总结得到

8.6.10 $\mathrm{SL}_2(2)$ 和 $\mathrm{SL}_2(3)$ 是可解群. 群 $\mathrm{SL}_2(2)$ 同构于 S_3, 群 $\mathrm{SL}_2(3)$ 是 3 阶循环群和 8 阶四元数群的非直积的半直积. 反之, 每一个这样的半直积都同构于 $\mathrm{SL}_2(3)$.

证明 只需证最后一个结论. 设 A, B 是非平凡地作用在四元数群 Q_8 上的两个 3 阶群. 只要证明

$$A \ltimes Q_8 \cong B \ltimes Q_8$$

即可. 因两个群都忠实地作用在 Q_8 上, 于是均可看成是 $\mathrm{Aut}\, Q_8$ 的子群. 由 5.3.3 知 A 和 B 在 $\mathrm{Aut}\, Q_8$ 中共轭, 从而对应的半直积是同构的. □

现在假设 $q \geqslant 4$. 那么 $D(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \neq \langle z \rangle$ 且对 $x \in D(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \backslash \langle z \rangle$ 从 8.6.3(d) 得

$$P(\boldsymbol{v}) = [P(\boldsymbol{v}), x] \leqslant \mathrm{SL}(V)'.$$

因此 SL(V) 的每一个 Sylow p 子群包含在 SL(V)$'$ 中. 于是由 8.6.7 得到

8.6.11 当 $q \geqslant 4$ 时, SL(V) 是完备的. □

因为 GL(V)/SL(V) ($\cong K^*$) 是交换的, 所以 GL(V) 的换位子群包含在 SL(V) 中. 因此当 $q \geqslant 4$ 时, 由 8.6.11 推出

$$\mathrm{GL}(V)' = \mathrm{SL}(V)^{①}.$$

① 这对 $q = 3$ 时也成立.

下面关于 SL(V) 结构的论述与下一章内容有关.

8.6.12 设 $p \neq 2$. 假设 a 是一个 p 元素, R 是 SL(V) 的一个使得 $1 \neq [R,a]$ 的 $\langle a \rangle$ 不变 p' 子群. 那么 $p=3$, R 是 8 阶四元数群且 $R\langle a \rangle \cong \mathrm{SL}_2(3)$.

证明 由 142 页 8.2.7, 有

$$R = [R,a]C_R(a) \text{ 和 } [R,a,a] = [R,a],$$

并且由 8.6.6(c) 得 $C_R(a) \leqslant \langle z \rangle$.

下证:

(1) $[R,a]$ 是一个四元数群.

(1) 蕴含 $\langle z \rangle = Z([R,a])$ (见 8.6.2), 从而 $R=[R,a]$. 因此 R 是一个四元数群 Q_{2^n}. 当 $n \geqslant 4$ 时, R 有指数为 2 的循环特征子群, 且 a 平凡地作用在 R 上 (见 140 页 8.2.2(b)). 因此 $R = Q_8$, 于是从 8.6.10 得到结论.

现在对 $|R|$ 用归纳法来证明 (1). 可假定 $R=[R,a]$, 且由于 140 页 8.2.3 也可假定 R 是一个 r 群, 其中, r 是异于 p 的素数.

如果 R 非循环, 则从 8.6.9 得到 (1). 下面证明 R 循环时会导出矛盾.

因为 $R=[R,a]$, 所以 a 作为 p 阶自同构作用在循环群 R 上. 由 40 页 2.2.5 得

(2) p 整除 $(r-1)$.

因此 $r \neq 2$, 且因 $|\mathrm{SL}(V)| = (q-1)q(q+1)$ 而有

(3) r 整除 $(q-1)$ 或 r 整除 $(q+1)$.

如果 $q=p$, 那么 (2) 和 (3) 互相矛盾.

情形 $r|(q-1)$ 不成立的证明也是初等的. 由 Sylow 定理, 可假设 $R \leqslant D(v,w)$, v,w 是 V 的基 (见 8.6.3(c)). 那么 Kv 和 Kw 是 V 仅有的 R 不变 1 维子空间 (见 8.6.6(a)). 因此 $R^a = R$ 表明 $\langle a \rangle$ 或者平凡或者传递地作用在集合 $\{Kv, Kw\}$ 上. 这分别与 $a \neq 1$ (见 8.6.5(c)) 和 $p \neq 2$ 矛盾.

从刚才的研讨, 只需考虑 $r|(q+1)$ 情形. 首先注意到

$$r \text{ 整除 } (q^2-1).$$

下面用有限域理论中"存在 $K=\mathbb{F}_q$ 的域扩张 L 使 $L \cong \mathbb{F}_{q^2}$"这样一个众所周知的事实. 它表明了

$$\mathrm{SL}(V) \cong \mathrm{SL}_2(q) \leqslant \mathrm{SL}_2(q^2) \cong (\widetilde{V}),$$

其中, $\widetilde{V}$ 是 L 上 2 维向量空间. 因此 $R\langle a \rangle$ 同构于 SL($\widetilde{V}$) 的子群. 因为 $r|(q^2-1)$, 可回到前面的情形, 于是同样可导出矛盾. □

8.6.13 设 $p \neq 2$ 且 G 是 SL(V) 的非 p 闭子群, 则 G 的 Sylow 2 子群是四元数群.

证明 设 $G \leqslant \mathrm{SL}(V)$ 是一个极小反例. 因为 $O^{p'}(G)$ 是 p 闭的当且仅当 G 是 p 闭的, 得

($'$) $O^{p'}(G) = G$.

用 8.6.9, 可假设对 $|G|$ 的所有 $r \neq p$ 的素因子, G 的 Sylow r 子群都是循环的. 设 r 是极小的这样的素因子. 因为由 ($'$) 知 G 没有正规 r 补 *, 从 7.2.1 得对 $R \in \mathrm{Syl}_r G$ 有

$$C_G(R) \neq N_G(R).$$

因此, 存在 $|N_G(R)|$ 的一个素因子 s(从而也是 $|G|$ 的素因子) 和一个 s 元素 $a \in N_G(R) \backslash C_G(R)$. 因为 R 是循环的, 2.2.5 蕴含

$$s \text{ 整除 } r-1.$$

由 r 的极小性得 $s = p$. 但是因 R 循环, 这和 8.6.12 矛盾. □

Dickson 的一个众所周知的定理证明了：8.6.13 中那样的群 G 有一个同构于 $\mathrm{SL}_2(p)$ 的子群①.

设 Ω 是 V 的 1 维子空间的集合, 即

$$\Omega := \{Kv | v \in V^{\#}\}^{②}.$$

那么 $\mathrm{GL}(V)$ 作用在 Ω 上

$$Kv \mapsto Kv^x, \ x \in \mathrm{GL}(V),$$

$\widehat{S}(v)$ 是点 Kv 的稳定子,

$$\widehat{D}(v, w) = \widehat{S}(v) \cap \widehat{S}(w) \quad (Kv \neq Kw)$$

是两个点的稳定子, 且

$$Z = Z(\mathrm{GL}(V)) \overset{8.6.6(\mathrm{a})}{=} \{z_\lambda | \lambda \in K^*\}$$

是这个作用的核. 因此

$$\langle z \rangle = Z \cap \mathrm{SL}(V) \overset{8.6.6(\mathrm{a})}{=} Z(\mathrm{SL}(V))$$

是 $\mathrm{SL}(V)$ 在 Ω 上的作用的核.

---

* 原书此处有误. —— 译者注

① 见文献 [6] 的第 8 章或文献 [12] 的第 44 页.

② Ω 是 K 上的 1 维射影空间 (projective space), 射影直线 (projective line).

进而 $P(V)$ 是 $\widehat{S}(v)$ 的正规子群, 它正则地作用在 $\Omega\backslash\{Kv\}$ 上 (用 $|P(v)| = q = |\Omega\backslash\{Kv\}|$ 和 8.6.5(c)). 因为 $P(v) \leqslant \mathrm{SL}(V)$, 所以 $\mathrm{SL}(V)$ 和 $\mathrm{GL}(V)$ 都在 Ω 上 2 重传递. 子群 $\widehat{D}(v, w)/Z$ 的阶为 $q-1$ 且正则作用在 $\Omega\backslash\{Kv, Kw\}$ 上 (见 8.6.6(a)). 于是 $\mathrm{GL}(V)$ 在 Ω 上的作用是 3 重传递的.

如果 $p = 2$, 则因 $z = 1$ 而有 $\mathrm{SL}(V)$ 忠实地作用在 Ω 上. 因此, $D(v, w)$ 在 $\Omega\backslash\{Kv, Kw\}$ 上是正则的, 从而在这种情形下 $\mathrm{SL}(V)$ 在 Ω 上也是 3 重传递的.

如果 $p \neq 2$, 那么 $z \neq 1$, $D(v, w)/\langle z\rangle$ 不能传递地作用在 $\Omega\backslash\{Kv, Kw\}$ 上. 因此, 在这种情形下 $\mathrm{SL}(V)$ 在 Ω 上不是 3 重传递的.

讨论也证明了群 $\widehat{S}(v)/Z$(或 $S(v)/\langle z\rangle$) 作为 Frobenius 群作用在 $\Omega\backslash\{Kv\}$ 上, 其中, $P(v)$ ($\cong K(+)$) 是 Frobenius 核且 $\widehat{D}(v, w)/Z$ ($\cong K^*$) (或 $D(v, w)/\langle z\rangle$) 是 Frobenius 补.

应该指出的是, 由 8.6.5(a), 映射

$$\rho : \Omega \to \mathrm{Syl}_p \mathrm{GL}(V), \text{ 使得 } Kv \mapsto P(v)$$

是一个满足如下条件:

$$((Kv)^x)^\rho = ((Kv)^\rho)^x$$

的双射. 因此 G 在 Ω 上的作用和在 $\mathrm{Syl}_p \mathrm{GL}(V)$ 上的作用 (由共轭) 是等价的.

商群

$$\mathrm{PGL}(V) := \mathrm{GL}(V)/Z(\mathrm{GL}(V)) \text{ 和 } \mathrm{PSL}(V) := \mathrm{SL}(V)/Z(\mathrm{SL}(V))$$

分别是 2 维的**射影线性群** (projective linear group) 和**特殊射影线性群** (special projective linear group).

类似地, 可定义

$$\mathrm{PGL}_2(q) := \mathrm{GL}_2(q)/Z(\mathrm{GL}_2(q)) \text{ 和 } \mathrm{PSL}_2(q) := \mathrm{SL}_2(q)/Z(\mathrm{SL}_2(q))^{①}.$$

8.6.14 定理 对每一个 $q \geqslant 4$, $\mathrm{PSL}(V)$ 是非交换单群.

证明 设 $G :=\mathrm{SL}(V)$, N 是 G 的使得

$$\langle z\rangle < N \leqslant G$$

的正规子群. 只要证明 $N = G$ 即可. 因为 G 在 Ω 上 2 重传递, 由 68 页 4.2.2 和 69 页 4.2.4 知 N 在 Ω 上传递. 因此由 Frattini 论断得 $G = NS(v)$. 特别地, 有

$$G/N \cong S(v)/S(v) \cap N.$$

① $\mathrm{PSL}_2(q)$ 的一系列全部子群首先由 Dickson[6] 给出; 见文献 [13], II.2.8.

由 $S(v)$ 的可解性 (见 8.6.3(c)) 得 G/N 可解, 从而有 $G/N = 1$ 或 $(G/N)' \neq G/N$. 在第 1 种情形时结论已成立, 而在第 2 种情形时有 $G' \neq G$(见 19 页 1.5.1), 与 8.6.11 矛盾. □

习　题

1. $\mathrm{PSL}_2(3) \cong A_4$, $\mathrm{PSL}_2(4) \cong \mathrm{PSL}_2(5) \cong A_5$.
2. A_6 和 $\mathrm{PSL}_2(9)$ 同构.
3. $\mathrm{PSL}_2(9)$ 有唯一的对合共轭类.
4. 每一个 120 阶的非可解群同构于 S_5, $\mathrm{SL}_2(5)$ 或 $A_5 \times C_2$.
5. 对 $q \equiv 3 \pmod 8$ 和 $q \equiv 5 \pmod 8$, $\mathrm{PSL}_2(q)$ 的 Sylow 2 子群同构于 $C_2 \times C_2$①.

① 由 Gorenstein-Walter 的一个定理, 这些是仅有的 Sylow 2 子群同构于 $C_2 \times C_2$ 的单群, 见附录.

第9章 二次作用

9.1 二次作用

本节中总假设, p 是素数, G 是作用在初等交换 p 群 V 上的群. 如果 a 是 G 的一个元素, 能使

$$[V,a,a]=1,$$

那么称 a 二次(quadratically)作用在 V 上. 这意味着 a, 从而 $\langle a\rangle$ 也平凡地作用在 $[V,a]$ 和 $V/[V,a]$ 上. 特别地, $\langle a\rangle C_G(V)/C_G(V)$ 是一个 p 群 (见 140 页 8.2.2(b)).

在自同构环 End V 中, a 的二次作用给出了

$$\text{对所有的 } v\in V, \text{ 有 } v^{(a-1)(a-1)}=1,$$

即 $(a-1)^2=0$①. 因此 a 或者平凡地作用在 V 上或有一个二次极小多项式.

若群 G 使

$$[V,G,G]=1,$$

则称 G 二次(quadratically)作用在 V 上.

下面的例子中, G 在 V 上的作用是二次的:

(a) G 平凡地作用在 V 上.

(b) $|G|=2=p$. 那么对 $a\in G$ 和 $v\in V$ 有

$$[v,a]^a=[v,a]^{-1}=[v,a].$$

(c) G 是一个 p 群且 $|V/C_V(G)|=p$, 见 135 页 8.1.4.

(d) V 是 $\mathbb{F}_{p^m}$ 上 2 维向量空间 W 的加群, G 是 SL(W) 的 Sylow p 子群, 见 163 页 8.6.4.

(e) V 和 G 是群 H 的正规子群且 G 是交换群,

$$[V,G,G]=[[V,G],G]\leqslant[V\cap G,G]=1.$$

如果对所有的 $a\in G$ 有

$$[V,a,a]=1\Rightarrow aC_G(V)\in O_p(G/C_G(V)),$$

① 因为把 V 写作乘法形式, 所以 End V 的 0 元素把 V 的每一个元素映射到 1_V.

那么称 G 在 V 上的作用是 p **稳定的**(p-stable).

对 $p=2$, 每一个对合都二次作用在 V 上 (例如, (b)). 于是只对 $p\neq 2$, p 稳定才有意义.

首先给出一些初等性质.

9.1.1　假设 G 二次作用在 V 上.

(a) 对所有的 $v\in V$, $a\in G$, $n\in\mathbb{N}$ 有 $[v,a^n]=[v^n,a]=[v,a]^n$.

(b) 对所有的 $a\in G$ 有 $|V|\leqslant |C_V(a)|^2$.

(c) $G/C_G(V)$ 是初等交换 p 群.

证明　因为对 $a\in G$ 有 $[v,a]^a=[v,a]$, 所以从 20 页 1.5.4 得到 (a). 现在从 $v^p=1$ 和 (a) 得 $[v,a^p]=1$. 特别地,

$$\text{对所有的 } a\in G, \text{ 有 } a^p\in C_G(V),$$

并且 G 的二次作用和三子群引理蕴含了 $[V,G']=1$. 因此 $G/C_G(V)$ 是交换群, 从而 (c) 成立.

最后由 150 页 8.4.1 得

$$V/C_V(a)\cong [V,a]\leqslant C_V(a),$$

于是 (b) 成立.　□

下一个例子表明对 $p>2$, p 阶元素不一定是二次作用的.

设 $G=S_4$, V 是 $\mathbb{F}_3$ 上基为 $v_1,\cdots,v_4$ 的 4 维向量空间. 那么

$$v_i^g := v_{ig},\quad i=1,\cdots,4, g\in G$$

定义了一个 G 在 V 上的忠实作用. 由 9.1.1(c), 只有 G 的 3 元素才能够二次作用在 V 上.

设 $g:=(123)$. 那么

$$[v_1,g,g]=[-v_1+v_2,g]=v_1+v_2+v_3\neq 0,$$

所以 G 的非平凡 3 元素不能二次作用在 V 上. 特别地, G 在 V 上的作用是 3 稳定的.

下面大多数情况只要把 V 看作素域 $\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上的向量空间 (见 47 页 2.1.8). 但在 9.1.4 的证明中研究 G 在 $\mathbb{F}_q$ 向量空间 W 上的作用则更为方便, 其中, $\mathbb{F}_q$ 的特征是 p①. 如果一个群或元素二次作用在 W 的加群上, 从一个稍微一般的观点上说这个群或元素二次作用在 $\mathbb{F}_q$ 向量空间 W 上.

---

① 所考虑的所有向量空间都是有限维的.

9.1.2 设 G 作用在 $\mathbb{F}_q$ 向量空间 $W \neq 0$ 上, $q = p^m$. 假设

(1) $G = \langle a, b\rangle$, 其中, a 和 b 二次作用在 W 上,

(2) $G/C_G(W)$ 不是 p 群.

(3) $o(ab) = p^e k$ 且 $k|(q-1)$.

那么存在同态

$$\varphi : G \to \mathrm{SL}_2(q)$$

使 G^φ 不是 p 群.

证明 对 $|G|+\dim W$ 用归纳法. 如果 G 的作用不是忠实的, 那么 $|G/C_G(W)| < |G|$, 由归纳法得到结论.

设 W_1 是 W 的极大 G 不变子空间. 如果 $G/C_G(W_1)$ 不是 p 群, 那么归纳法得到对群偶 (G, W_1) 结论成立从而对群偶 (G, W) 结论也成立. 最后如果 $G/C_G(W_1)$ 是 p 群, 那么由假设 (2) 和 8.2.2(b) 得到 $G/C_G(W/W_1)$ 不是 p 群. 在情形 $W_1 \neq 0$ 时有 $\dim W/W_1 < \dim W$, 再次用归纳法得到结论.

剩下的是 G 忠实且不可约地作用在 W 上的情形. 特别地, 因为 a 和 b 的二次作用得它们是 p 元. 假设 (2) 表明 G 不是交换群.

由假设 (3) 和 Schur 引理 (见 160 页 8.6.1) 知道循环群 $\langle ab\rangle$ 按纯量乘法作用在 W 的极小 $\langle ab\rangle$ 不变子空间上. 特别地, W 中存在向量 $\boldsymbol{w} \neq 0$ 和 $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$ 使

$$\boldsymbol{w}^{ab} = \lambda \boldsymbol{w}, \text{于是 } \boldsymbol{w}^a = \lambda \boldsymbol{w}^{b^{-1}}.$$

如果 $\boldsymbol{w}^a \in \mathbb{F}_q\boldsymbol{w}$, 那么 $\mathbb{F}_q\boldsymbol{w}$ 是 G 不变的, 从而由 W 的不可约性得到 $W = \mathbb{F}_q\boldsymbol{w}$. 但由此得 G 是交换群, 这是一个矛盾.

证明了 $W_1 := \mathbb{F}_q\boldsymbol{w} + \mathbb{F}_q\boldsymbol{w}^a$ 是 2 维的. a 和 b 的二次作用给出

$$\boldsymbol{w}^a - \boldsymbol{w} = [\boldsymbol{w}, a] \in C_{W_1}(a),$$
$$\boldsymbol{w}^{b^{-1}} - \boldsymbol{w} = \lambda^{-1}\boldsymbol{w}^a - \boldsymbol{w} \in C_{W_1}(b).$$

因此 $(\boldsymbol{w}^a)^a \in W_1$, $\boldsymbol{w}^b \in W_1$, 当然也有 $(\boldsymbol{w}^a)^b \in W_1$. 这证明了 W_1 是 G 不变的, 从而 $W_1 = W$. 特别地, 因 G 由 p 元 a, b 生成而有 $G \leqslant \mathrm{SL}(V) \cong \mathrm{SL}_2(q)$. □

9.1.3 设 $p \neq 2$ 且 G 在 V 上是忠实的. 假设

(1) $G = \langle a, b\rangle$, 其中, a 和 b 二次作用在 V 上,

(2) G 不是 p 群.

那么下面的结论成立:

(a) G 的 Sylow 2 子群不是交换群.

(b) 如果 Q 是 G 的正规 p' 子群且 $[Q, a] \neq 1$, 那么 $p = 3$ 且 G 有同构于 $\mathrm{SL}_2(3)$ 的截断.

证明　设 $o(ab) = p^e k$ 使 $(p, k) = 1$, q 是使 $k|(q-1)$ 的 p 的方幂[①]. 把 V 作为 $\mathbb{F}_p$ ($\leqslant \mathbb{F}_q$) 上的向量空间写作加法形式, 且取 V 的基为 $v_1, \cdots, v_n$. 设 W 是基为 $v_1, \cdots, v_n$ 的 $\mathbb{F}_q$ 向量空间, 即有 $V \subseteq W$. G 在 V 上的作用被基 $v_1, \cdots, v_n$ 在 G 下的像唯一确定. 因此 G 在 V 上的作用能够被唯一地扩张为 G 在向量空间 W 上的作用[②]. 于是 G 和 W 满足 9.1.2 的假定, 所以存在同态 $\varphi: G \to \mathrm{SL}_2(q)$ 使

$$G^\varphi = \langle a^\varphi, b^\varphi \rangle$$

不是 p 群. 特别地, 因 a^φ 和 b^φ 是 p 元得 G^φ 非 p 闭. 于是从 8.6.13 得到 (a).

对于 (b) 的证明, 可假定 Q^φ 是一个使 $[Q^\varphi, a^\varphi] \neq 1$ 的 a^φ 不变 p' 子群. 那么从 8.6.12 得到结论 (b).　□

9.1.4　定理　设 $p \neq 2$. 假设 G 在 V 上的作用是忠实但非 p 稳定的. 那么下面成立:

(a) G 的 Sylow 2 子群是非交换群.

(b) 如果还有 G 是 p 可分的, 那么 $p = 3$ 且 G 有同构于 $\mathrm{SL}_2(3)$ 的截断.

证明　因为 G 在 V 上是 p 稳定的, 所以存在 $a \in G \backslash O_p(G)$ 使 $[V, a, a] = 1$. 设 $\mathcal{K}$ 是 V 的 G 合成因子的集合. 由 8.2.10 有

$$O_p(G) = \bigcap_{W \in \mathcal{K}} C_G(W).$$

因此存在 $W \in \mathcal{K}$ 使 $a \notin C_G(W)$, 从而有

$$aC_G(W) \notin O_p(G/C_G(W)) = 1.$$

于是 $G/C_G(W)$ 和 W 满足假定, 从而由对 $|G| + |V|$ 的归纳法, 可假定 $W = V$ 且 $O_p(G) = 1$. 由 Baer 定理知存在 $b \in a^G$ 使

$$G_1 := \langle a, b \rangle$$

不是 p 群.

于是从 9.1.3(a) 得到结论 (a)(用 G_1 替代 G); 注意到 b 也二次作用在 W 上.

假设 G 是 p 可分的且 $Q := O_{p'}(G)$. 那么 $[Q, a] \neq 1$(见 6.4.3), 可以在 a^Q 中选取 b. 因此从 9.1.3(b) 得到结论 (b).　□

由提到的 Dickson 定理, 9.1.4(a) 的证明提供了一个更强的结论: G 有同构于 $\mathrm{SL}_2(p)$ 的截断.

---

① 因为 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 是有限的, 所以存在正整数 $i < j$ 使 $p^j \equiv p^i \pmod k$, 因此有 $p^{j-i} \equiv 1 \pmod k$.

② 矩阵方式为 $G \leqslant \mathrm{GL}_n(p) \leqslant \mathrm{GL}_n(q)$.

反之, 设 V 是 $\mathbb{F}_p$ 上的 2 维向量空间. 那么由同构 $SL_2(p) \cong SL(V)$ 得到 $SL_2(p)$ 在 V 上的作用, 因 $O_p(SL(V)) = 1$ 知这个作用不是 p 稳定的 (见例 (d)).

以一个后面要用到的引理来结束本节. 证明自然地涉及二次作用情形.

9.1.5 假设 G 忠实地作用在 V 上. 设 E_1, E_2 是 G 的两个次正规子群, 且能使 $[V, E_1, E_2] = 1$. 那么 $[E_1, E_2] \leqslant O_p(G)$.

证明 由假定知道 $V_1 := [V, E_1]$ 在 $E := \langle E_1, E_2\rangle$ 下是不变的, 因此

$$E_0 := C_E(V_1) \text{ 和 } E^0 := C_E(V/V_1)$$

是 E 的正规子群. 因为 $E_0 \cap E^0$ 二次作用在 V 上, 所以 $E_0 \cap E^0$ 是 p 群 (见 9.1.1(c)), 因此 $E_0 \cap E^0 \leqslant O_p(E)$. 于是 $E_1 \leqslant E^0$ 和 $E_2 \leqslant E_0$ 蕴含了

$$[E_1, E_2] \leqslant [E^0, E_0] \leqslant E_0 \cap E^0 \leqslant O_p(E).$$

由 6.7.1 得 E 从而 $O_p(E)$ 也次正规于 G, 所以 $O_p(E) \leqslant O_p(G)$(见 6.3.1). □

9.2 Thompson 子群

同 9.1 节, 设 G 是作用在初等交换 p 群 V 上的群. 本节讨论怎样寻求 G 的二次但非平凡地作用在 V 上的子群的问题.

显然, 对 G 的每一个子群 A, 子群

$$A^* := C_A([V, A])$$

二次作用在 V 上. 于是对保证 $C_A(V) < A^*$ 成立的条件感兴趣. 下一个引理给出了第一个线索. 证明的关键论证归功于 Thompson.

9.2.1 假设群 A 作用在初等交换 p 群 V 上且使 $A/C_A(V)$ 是交换群. 设 U 是 V 的子群, 那么 A 有子群 A^* 使下面之一成立:

(a) $|A||C_V(A)| < |A^*||C_V(A^*)|$ 或

(b) $A^* = C_A([U, A])$, $C_V(A^*) = [U, A]C_V(A)$ 且

$$|A||C_V(A)| = |A^*||C_V(A^*)|.$$

证明 假定对 A 的所有子群 B 有

(*) $|A||C_V(A)| \geqslant |B||C_V(B)|$,

对

$$A^* := C_A([U, A])$$

证明 (b) 中的等式. 显然 $[U, A, A^*] = 1$ 且因 $A/C_A(V)$ 是交换群有 $[A, A^*, U] = 1$. 因此由三子群引理知 $[U, A^*, A] = 1$, 即

(1) $[U,A^*] \leqslant C_V(A)$.

首先证明不等式

(2) $|A||C_V(A)| \leqslant |A^*||[U,A]C_V(A)|$

蕴含 (b), 有

$$|A^*||C_V(A^*)| \overset{(*)}{\leqslant} |A||C_V(A)| \overset{(2)}{\leqslant} |A^*||[U,A]C_V(A)| \leqslant |A^*||C_V(A^*)|,$$

从而有 $|A^*||C_V(A^*)| = |A||C_V(A)|$ 和 $|[U,A]C_V(A)| = |C_V(A^*)|$. 因为 $[U,A] \leqslant C_V(A^*)$ 所以最后的一个等式蕴含 $C_V(A^*) = [U,A]C_V(A)$.

下面证明 (2). 假定 $U \neq 1$. 设

$$Y := C_V(A) \text{ 且 } X := [U,A].$$

首先处理 $|U| = p$ 的情形, 利用归纳法可以把一般的情形归纳到这种情形.

假设 $U = \langle u\rangle$. 那么因为 V 是交换群, 所以 20 页 1.5.4 表明 $[u,A] = [U,A]$. 因为对所有的 $a^* \in A^*$ 由 (1) 得

$$[u,a^*a] = [u,a][u,a^*]^a \in [u,a]Y,$$

所以映射

$$\varphi: A/A^* \to XY/Y \text{ 使 } aA^* \mapsto [u,a]Y$$

是良定义的. 如果 φ 是单射, 那么

$$|A/A^*| \leqslant |XY/Y|,$$

从而得到 (2). 设 $a_1, a_2 \in A$ 使 $[u,a_1]Y = [u,a_2]Y$, 即 $[u,a_1][u,a_2]^{-1} = u^{a_1}u^{-a_2} \in Y$. 那么有

$$[u,a_1a_2^{-1}] = u^{-1}u^{a_1a_2^{-1}} = (u^{-a_2}u^{a_1})^{a_2^{-1}} = u^{a_1}u^{-a_2} \in Y.$$

于是

$$[u,a_1a_2^{-1},A] = 1 = [a_1a_2^{-1},A,u],$$

所以 $[u,A,a_1a_2^{-1}] = 1$, $a_1a_2^{-1} \in C_A([U,A]) = A^*$. 这说明了 φ 是单射, 从而在情形 $U = \langle u\rangle$ 时得到 (2).

现在假设 $|U| > p$. 设 U_1 是 U 的指数为 p 的子群. 那么对一个合适的 $u \in U$ 有 $U = U_1\langle u\rangle$. 设

$$X_1 := [U_1,A],\ A_1 := C_A(X_1) \text{ 且}$$
$$X_2 := [\langle u\rangle,A],\ A_2 := C_A(X_2).$$

注意到

$$X_1X_2C_V(A) = XC_V(A),\ A^* = A_1 \cap A_2$$

和

$$X_1C_V(A) \cap X_2C_V(A) \leqslant C_V(A_1A_2).$$

由对 $|U|$ 的归纳法, 可假设对 $i=1,2$ 有

$$|A||C_V(A)| = |A_i||X_iC_V(A)|.$$

因此

$$|A||C_V(A)| \overset{(*)}{\geqslant} |A_1A_2||C_V(A_1A_2)| \geqslant |A_1A_2||X_1C_V(A) \cap X_2C_V(A)|$$
$$\overset{1.1.6}{=} \frac{|A_1||A_2|}{|A_1 \cap A_2|}\frac{|X_1C_V(A)||X_2C_V(A)|}{|X_1C_V(A)X_2C_V(A)|} = \frac{|A|^2|C_V(A)|^2}{|A^*||XC_V(A)|},$$

于是 $(*)$ 蕴含 (2). □

鉴于 9.2.1, G 的可能是二次作用的子群是满足下面条件的子群 A:

Q_1 对 A 的所有子群 A^* 有 $|A||C_V(A)| \geqslant |A^*||C_V(A^*)|$ 且

Q_2 $A/C_V(A)$ 是初等交换 p 群.

注意到, 由 9.1.1(c) 知每一个二次作用子群满足 Q_2. 因此 Q_2 是必要条件.

设 $\mathcal{A}_V(G)$ 是满足 Q_1 和 Q_2 的 G 的子群 A 的集合. 对每一个这样的子群 A, 从 9.2.1(b) 得到 (令 $U=V$)

9.2.2 设 $A \in \mathcal{A}_V(G)$ 且 $A^* := C_A([V,A])$. 那么

$$|A/A^*| = |C_V(A^*)/C_V(A)| \text{ 且 } C_V(A^*) = [V,A]C_V(A). \qquad □$$

9.2.3 Timmesfeld 替换定理 [95]① 设 $A \in \mathcal{A}_V(G)$ 且 U 是 V 的子群. 那么有

$$C_A([U,A]) \in \mathcal{A}_V(G) \text{ 且 } C_V(C_A([U,A])) = [U,A]C_V(A).$$

此外如果 $[V,A] \neq 1$, 那么 $[V, C_A([U,A])] \neq 1$.

证明 设 $A^* := C_A([U,A])$. 因为 $A \in \mathcal{A}_V(G)$, 故可运用 9.2.1(b), 所以有

(′) $|A^*||C_V(A^*)| = |A||C_V(A)|$ 且 $C_V(A^*) = [U,A]C_V(A)$.

另外, 对每一个 $A_0 \leqslant A^*$ 由 Q_1 得

$$|A_0||C_V(A_0)| \leqslant |A^*||C_V(A^*)|.$$

因此 $A^* \in \mathcal{A}_V(G)$.

① 也见文献 [38].

对于附加论断的证明, 假设 $[V, A^*] = 1$. 那么 (′) 蕴含

$$V = [U, A]C_V(A) = [V, A]C_V(A).$$

特别地, 有 $[V, A, A] = [V, A]$. 但因为 $A/C_A(V)$ 是 p 群而有 $[V, A] = 1$(见 8.1.4(b)). □

记集合

$$\{A \in \mathcal{A}_V(G) | [V, A] \neq 1\}$$

的极小元素的集合为 $\mathcal{A}_V(G)_{\min}$.

9.2.4　$\mathcal{A}_V(G)_{\min}$ 的每一个元素二次非平凡地作用在 V 上.

证明　设 $A \in \mathcal{A}_V(G)_{\min}$. 由 9.2.3, $A^* := C_A([V, A])$ 也在 $\mathcal{A}_V(G)$ 中且 $[V, A^*] \neq 1$. A 的极小性蕴含 $A = A^*$, 从而 $[V, A, A] = 1$. □

到现在为止, 只讨论了那些二次作用的子群而没有排除这些子群是平凡作用的可能性 (见 171 页中的例子). 以下由 9.2.4 得

9.2.5　假设 G 在 V 上是 p 稳定的且 $O_p(G/C_G(V)) = 1$. 那么 $\mathcal{A}_V(G)$ 的每一个元素平凡地作用在 V 上. □

性质

(∗)　$O_p(G/C_G(V)) = 1$

不只是对 p 稳定有用, 将在后面的另一种情形中遇到它. 例如, 如果 G 不可约地作用在 V 上 (见 8.1.5), 那么就会满足 (∗). 下面是一个更一般的蕴含 (∗) 的条件:

9.2.6　设 $V = \langle C_V(S) | S \in \mathrm{Syl}_p G\rangle$. 那么 $O_p(G/C_G(V)) = 1$.

证明　设 S 是 G 的 Sylow p 子群. 设

$$Z := C_V(S) \text{ 且 } C := C_G(V).$$

因为 G 的所有 Sylow p 子群共轭, 所以有

$$V = \langle Z^G \rangle.$$

设 $C \leqslant D \leqslant G$ 使 $D/C = O_p(G/C)$. 那么 $D \cap S \in \mathrm{Syl}_p D$, $D = C(D \cap S)$(见 3.2.5), 从而有

$$G = CN_G(D \cap S) \text{ (Frattini 论断)}.$$

由此得到

$$V = \langle Z^{N_G(D \cap S)} \rangle,$$

从而 $[V, D \cap S] = 1$. 因此 $D \cap S \leqslant C$, 得 $D = C$. □

下面是 9.2.6 的一个常用的结论:

9.2.7 设 G 是群且 $C_G(O_p(G)) \leqslant O_p(G)$. 那么

$$V := \langle \Omega(Z(S)) | S \in \mathrm{Syl}_p G \rangle$$

是 G 的初等交换正规子群且 $O_p(G/C_G(V)) = 1$.

证明 设 $S \in \mathrm{Syl}_p G$. 那么 $\Omega(Z(S)) \leqslant C_G(O_p(G)) \leqslant O_p(G) \leqslant S$, 所以 V 被包含在 $\Omega(Z(O_p(G)))$ 中, 从而 $\Omega(Z(S)) = C_V(S)$. 于是从 9.2.6 得到结论. □

下面旨在找 $\mathcal{A}_V(G)$ 中非平凡作用在 V 上的群存在的条件. 如同在 9.2.7 中一样, 研究在大多数应用中都出现的情形. 从现在起假设

- V 是 G 的初等交换正规子群且.
- G 由共轭作用在 V 上.

对下面的研究, 由 Thompson 引进了一个至关重要的子群, 这个子群便以他的名字命名. 下面来定义这个子群, 设 p 是素数, $\mathcal{E}(G)$ 是 G 的初等交换子群的集合. 设

$$m := \max\{|A| | A \in \mathcal{E}(G)\},$$
$$\mathcal{A}(G) := \{A \in \mathcal{E}(G) | |A| = m\},$$
$$J(G) := \langle A | A \in \mathcal{A}(G) \rangle.$$

$J(G)$ 叫做 G 的关于 p 的**Thompson 子群** (Thompson subgroup). 从上下文总是很容易的知道 Thompson 子群的定义中 p 是哪一个素数.

在回到二次作用以前, 首先列出 Thompson 子群的初等性质, 这些性质都是从这个定义容易得到的结果.

9.2.8 (a) $J(G)$ 是 G 的特征子群, 如果 $p \in \pi(G)$ 那么它是非平凡的.

(b) 如果 $J(G) \leqslant U \leqslant G$, 那么 $J(G) = J(U)$.

(c) $J(G) = \langle J(S) | S \in \mathrm{Syl}_p G \rangle$.

(d) 如果 $x \in C_G(J(G))$ 且 $o(x) = p$, 那么 $x \in Z(J(G))$.

(e) 如果 $B \in \mathcal{A}(G)$, 那么 $J(\langle B \rangle) = \langle B \rangle$. □

下面的结果给出 $\mathcal{A}(G)$ 和 $\mathcal{A}_V(G)$ 之间的一个联系:

9.2.9 (a) $\mathcal{A}(G) \subseteq \mathcal{A}_V(G)$.

(b) 如果 $V \not\leqslant Z(J(G))$, 那么存在 $A \in \mathcal{A}(G)$ 使 $[V, A] \neq 1$.

证明 设 A^* 是 $A \in \mathcal{A}(G)$ 的子群. 那么 $A^* C_V(A^*)$ 在 $\mathcal{E}(G)$ 中. 由此得到

$$|A| \geqslant |A^* C_V(A^*)| = \frac{|A^*||C_V(A^*)|}{|A^* \cap V|} \geqslant \frac{|A^*||C_V(A^*)|}{|C_V(A)|},$$

从而 A 满足 $\mathcal{Q}_1$.

(b) 是显然的. □

根据 9.2.9(a), 运用先前的结果到 $\mathcal{A}(G)$ 上得到

9.2.10 定理 设 $A \in \mathcal{A}(G)$ 且 $A_0 := [V, A]C_A([V, A])$.

(a) A_0 在 $\mathcal{A}(G)$ 中且二次作用在 V 上.

(b) 如果 $[V, A] \neq 1$, 那么也有 $[V, A_0] \neq 1$.

证明 设 $X := [V, A]$ 且 $A^* := C_A(X)$, 即 $A_0 = A^*X$. 那么 A_0 是初等交换 p 群. 由它的定义得

$$[V, A_0, A_0] \leqslant [V, A, A_0] = 1,$$

所以 A_0 二次作用在 V 上. 要证明 $A_0 \in \mathcal{A}(G)$, 只要证明 $|A| = |A_0|$ 就够了. 由 A 的极大性得到

$$C_V(A) = V \cap A = V \cap A^*,$$

从而由 A^* 的定义得

$$X \cap A = X \cap A^*.$$

由此得到

$$|A||A \cap V| = |A||C_V(A)| \xlongequal{9.2.2} |A^*||XC_V(A)|,$$

从而由 1.1.6 得

$$|A| = \frac{|A^*||XC_V(A)|}{|C_V(A)|} = \frac{|A^*||X|}{|X \cap C_V(A)|} = \frac{|A^*||X|}{|X \cap A^*|} = |A^*X| = |A_0|.$$

由此得 (a), 9.2.3 蕴含 (b). □

当 $A^* := C_A(V)$ 时, 条件 $\mathcal{Q}_1$ 蕴含

$\mathcal{Q}_1'$ $|A/C_A(V)| \geqslant |V/C_V(A)|$.

能够据此导出一个更深刻的蕴含非平凡二次作用的性质.

9.2.11 设 G 的满足 $\mathcal{Q}_1'$ 和 $\mathcal{Q}_2$ 的子群 A 的集合为 $\mathcal{B}$. 设 $A \in \mathcal{B}$ 且假设对 A 的所有在 $\mathcal{B}$ 中的子群 A^* 有

(m) $|A^*/C_{A^*}(V)||C_V(A^*)| \leqslant |A/C_A(V)||C_V(A)|$.

那么 $A \in \mathcal{A}_V(G)$.

证明 对 A 需证 $\mathcal{Q}_1$. 设 $A^* \leqslant A$. 如果 A^* 不满足 $\mathcal{Q}_1'$, 那么 A^* 不在 $\mathcal{B}$ 中且

$$|A^*/C_{A^*}(V)||C_V(A^*)| < |V| \overset{\mathcal{Q}_1'}{\leqslant} |A/C_A(V)||C_V(A)|.$$

由此得到

$$|A/C_A(V)||C_V(A)| \geqslant |A^*/C_{A^*}(V)||C_V(A^*)| \overset{1.2.6}{=} |A^*C_A(V)/C_A(V)||C_V(A^*)|.$$

因为 (m) 成立所以对 $A^* \in \mathcal{B}$ 这个不等式也成立. 于是对所有的 $A^* \leqslant A$ 有

$$|A^*||C_V(A^*)| \leqslant |A^*C_A(V)||C_V(A^*)| \leqslant |A||C_V(A)|,$$

从而 A 满足 Q_1. □

假设存在 $A \in \mathcal{B}$ 非平凡地作用在 V 上. 在所有这样的 A 中, 选取使

$$|A/C_A(V)||C_V(A)|$$

极大的 A. 那么对 A, 9.2.11 中的 (m) 成立, 即 $A \in \mathcal{A}_V(G)$ 从而 $\mathcal{A}_V(G)_{\min} \neq \varnothing$. 于是 9.2.4 给出二次且非平凡地作用在 V 上的子群的存在性.

设 S 是 G 的 Sylow p 子群. 如果

$$G = O_{p'}(G)C_G(\Omega(Z(S)))N_G(J(S)),$$

那么 G 叫做关于 p 是**Thompson 可分解的**. 注意到 $\overline{S}$ 是 $\overline{G} := G/O_{p'}(G)$ 的 Sylow p 子群. Frattini 论断蕴含 (见 3.2.8)

$$N_{\overline{G}}(J(\overline{S})) = \overline{N_G(J(S))} \text{ 和 } C_{\overline{G}}(\Omega(Z(\overline{S}))) = \overline{C_G(\Omega(Z(S)))}.$$

因此 G 是 Thompson 可分解的当且仅当 $\overline{G}$ 是 Thompson 可分解的.

9.2.12 设 $O_{p'}(G) = 1$ 且 $V := \langle \Omega(Z(S)) | S \in \mathrm{Syl}_p G \rangle$. 那么 G 是 Thompson 可分解的当且仅当 $J(G) \leqslant C_G(V)$.

证明 设 $S \in \mathrm{Syl}_p G$ 且 $C := C_G(V)$. 假设 G 是 Thompson 可分解的. 那么由 Sylow 定理得到

$$V = \langle \Omega(Z(S))^g | g \in G \rangle = \langle \Omega(Z(S))^g | g \in N_G(J(S)) \rangle.$$

因 $\Omega(Z(S)) \leqslant Z(J(S))$ 知这蕴含 $V \leqslant Z(J(S))$, 从而有 $J(G) \leqslant C$(见 9.2.8(c)).

现在假定 $J(G) \leqslant C$. 那么 $J(S) \leqslant C \cap S$. 因为

$$J(S) \text{ char } C \cap S \in \mathrm{Syl}_p C$$

且 $\Omega(Z(S)) \leqslant Z(J(S))$, 所以由 Frattini 论断得分解

$$G = CN_G(C \cap S) = C_G(\Omega(Z(S)))N_G(J(S)).$$ □

9.3 p 可分群中的二次作用

本节考虑关于 p 不是 Thompson 可分解的 p 可分群. 下面的结果提供了合适的构造条件:

9.3.1 假设 G 关于 p 是非 Thompson 可分解的 p 可分群, 设 $O_{p'}(G) = 1$ 和

$$V := \langle \Omega(Z(S)) | S \in \mathrm{Syl}_p G \rangle, \quad H := J(G)C_G(V)/C_G(V).$$

那么下面成立:

$\mathcal{S}_1$　$C_H(O_{p'}(H)) \leqslant O_{p'}(H)$.

$\mathcal{S}_2$　V 是初等交换 p 群且 H 忠实地作用在 V 上.

$\mathcal{S}_3$　$H = \langle A | A \in \mathcal{A}_V(H) \rangle \neq 1$.

证明　由 6.4.3 得 $C_G(O_p(G)) \leqslant O_p(G)$. 因此从 9.2.7 得到 $\mathcal{S}_2$ 和 $O_p(G/C_G(V)) = 1$, 特别有 $O_p(H) = 1$. 因为 H 是 p 可分的从而也是 p' 可分的, 所以由 6.4.3 得到 $\mathcal{S}_1$. 又 9.2.9 和 9.2.12 蕴含 $H \neq 1$, 从而有 $\mathcal{S}_3$. □

在下面用性质 $\mathcal{S}_1 \sim \mathcal{S}_3$ 而不用 G 的可分性.

从一个例子开始, 这个例子在后面的 9.3.7 被证明是具有代表性的. 设 $V_1, \cdots, V_r$ 是 p^2 阶的初等交换 p 群. 把这些群看成是 2 维的 $\mathbb{F}_p$ 向量空间. 那么有

$$E_i := \mathrm{SL}(V_i), \quad i = 1, \cdots, r$$

自然地作用在 V_i 上且

$$\mathcal{A}_{V_i}(E_i) = \{A | A \in \mathrm{Syl}_p\ E_i\}$$

(对照 8.6.4). 因此群对 (E_i, V_i) 满足 $\mathcal{S}_2$ 和 $\mathcal{S}_3$. 对 $p = 2$ 和 $p = 3$, 群 E_i 是可解的. 于是在这些情形下 $\mathcal{S}_1$ 也成立, 见 8.6.10. 设

$$H := E_1 \times \cdots \times E_r, \quad V := V_1 \times \cdots \times V_r.$$

那么分支 E_i 的作用诱导了 H 在 V 上的作用, 即同 $\mathrm{SL}(V_i)$ 那样作用在 V_i 上且当 $i \neq j$ 时 $[V_j, E_i] = 1$. 由此得到

$$\mathcal{A}_{V_i}(E_i) = \mathcal{A}_V(E_i) \subseteq \mathcal{A}_V(H),$$

所以对 $p \in \{2, 3\}$ 群对 (H, V) 满足 $\mathcal{S}_1 \sim \mathcal{S}_3$.

从现在起, 设 (H, V) 是满足 $\mathcal{S}_1 \sim \mathcal{S}_3$ 的群对.

9.3.2　设 $1 \neq A \in \mathcal{A}_V(H)$.

(a) $|A| = |V/C_V(A)|$.

(b) 存在 $A_1, \cdots, A_k \in \mathcal{A}_V(H)_{\min}$ 使 $A = A_1 \times \cdots \times A_k$.

(c) 对所有的 $B \in \mathcal{A}_V(H)_{\min}$ 有 $|B| = |[V, B]| = |V/C_V(B)| = p$.

证明　假设 $A \in \mathcal{A}_V(H)$ 给出了对 A 所有的子群 A_i 有

(*) $|A_i||C_V(A_i)| \leqslant |A||C_V(A)|$.

设 $\mathcal{B}$ 是 A 的极大子群的集合, 即有

$$|A/A_i| = p, \quad A_i \in \mathcal{B}.$$

设 $Q := O_{p'}(H)$. 把 146 页 8.3.4(c) 运用到 A 和 Q 上. 那么有

($'$) $1 \neq [Q, A] = \langle [C_Q(A_i), A] | A_i \in \mathcal{B} \rangle$.

因此存在 $A_0 \in \mathcal{B}$ 使

$$Q_0 := [C_Q(A_0), A] \neq 1,$$

从而 $Q_0 = [Q_0, A]$(见 8.2.7). 如果 $C_V(A_0) = C_V(A)$, 那么 Q_0 平凡地作用在 $C_V(A_0)$ 上, 从而由 $P \times Q$ 引理 (应用到 $Q_0 \times A_0$ 和 V 上) 得到 $[V, Q_0] = 1$. 于是 $Q_0 = 1$, 得到矛盾.

已证明了 $C_V(A_0) \neq C_V(A)$, 特别有 $|C_V(A_0)/C_V(A)| \geqslant p$ 且

$$|A||C_V(A)| \leqslant |A_0||C_V(A_0)|.$$

因为由 (*) 知反向的不等式也成立, 所以得到

(**) $|A||C_V(A)| = |A_0||C_V(A_0)|$.

从而 $A_0 \in \mathcal{A}_V(H)$, 并且如果 $A \in \mathcal{A}_V(H)_{\min}$, 那么 $A_0 = 1$, 从而

$$|A| = |V/C_V(A)| = p.$$

这和 (**) 一起得到 (a) 和 (c).

最后证明 (b). 假设 $|A| > p$. 根据 ($'$) 存在第二个子群 $A_1 \in \mathcal{B}$ 使 $[C_Q(A_1), A] \neq 1$, 同上面所见到的那样有 $A_1 \in \mathcal{A}_V(H)$.

由对 $|A|$ 的归纳法, 可假定当 A_0 和 A_1 替代 A 时 (b) 成立, 那么因 $A = A_0A_1$ 而有对于 A, (b) 也成立. □

9.3.3 设 $A \in \mathcal{A}_V(H)_{\min}$, $x \in O_{p'}(H) \backslash C_{O_{p'}(H)}(A)$ 且设

$$E_x := \langle A, A^x \rangle, \ Q_x := E_x \cap O_{p'}(H) \text{ 和 } V_x := [V, E_x].$$

那么下面成立:

(a) $p \in \{2, 3\}$.

(b) $|V_x| = p^2$.

(c) $E_x = \mathrm{SL}(V_x) \cong \mathrm{SL}_2(p)$.

特别地, Q_x 平凡地作用在 V_x 上且

$$Q_x \cong \begin{cases} C_3, & p = 2, \\ Q_8, & p = 3. \end{cases}$$

证明 因为

$$1 \neq [x, A] \leqslant E_x \cap O_{p'}(H) = Q_x \text{ 且 } AQ_x = E_x.$$

所以子群 A^x 和 A 是 E_x 的两个不同的 Sylow p 子群. 于是它们在 Q_x 下共轭, 从而

(′) $[Q_x, A] \neq 1$.

因为 E_x 平凡地作用在 $V/[V,A][V,A^x]$ 上所以有

$$V_x = [V,A][V,A^x].$$

由 9.3.2 得 $|A| = p$ 和 $|[V,A]| = p$, 所以 $|V_x| \leqslant p^2$. 又由 8.2.2 得 p' 群 Q_x 忠实地作用在 V_x 上. 因此由 A 的二次作用得到 (b). 另外, 8.6.12 和 (′) 蕴含 (a). 于是, 由 8.6.10 中给出的群 $SL_2(2)$ 和 $SL_2(3)$ 的结构得到 (c), 从而也得到附加的论断. □

9.3.4 设 $A \in \mathcal{A}_V(H)_{\min}$. 那么 $[O_{p'}(H), A]$ 是 $O_{p'}(H)$ 的正规 3 子群且 $p = 2$, 或 $[O_{p'}(H), A]$ 是正规非交换群 2 子群且 $p = 3$. 特别地, 9.3.3 中定义的子群 Q_x 在 $O_{p'}(H)$ 中次正规.

证明 子群 $[O_{p'}(H), A]$ 正规于 $O_{p'}(H)$. 设 r 是 $|O_{p'}(H)|$ 的一个素因子, R 是 $O_{p'}(H)$ 的 A 不变 Sylow r 子群 (见 8.2.3). 如果 $[R, A] \neq 1$, 那么, 对 $x \in R$ 和 $[x, A] \neq 1$ 由 9.3.3 证明 $p = 3$ 且 Q_x 是四元数群, 或 $p = 2$ 且 Q_x 是非平凡 3 群. 特别地, 这表明了 $O_{p'}(H) = RC_{O_{p'}(H)}(A)$ 且 $[O_{p'}(H), A] \leqslant R$(见 8.1.1). □

在 9.3.4 的情形下, 下面的引理是关键的:

9.3.5 设 E 是一个群且忠实地作用在初等交换 p 群 V 上, E_1, E_2 是 E 的两个次正规子群且

$$V_i := [V, E_i], \quad i = 1, 2.$$

假设下面成立:

(1) $E = \langle E_1, E_2 \rangle$ 且 $O_p(E) = 1$.

(2) E_i 不可约地作用在 V_i 上, $i = 1, 2$.

(3) $V_1 \not\leqslant V_2$ 且 $V_2 \not\leqslant V_1$.

(4) $|E_1| > 2$ 且 $|E_2| > 2$.

那么 $E = E_1 \times E_2$ 且 $[V, E] = V_1 \times V_2$.

证明 显然 $[V, E] = V_1V_2$, E 平凡地作用在 V/V_1V_2 上. 由 8.2.2(b) 得 $C_E(V_1V_2)$ 是 p 群从而由 (1) 得到

$$C_E(V_1V_2) \leqslant O_p(E) = 1.$$

类似地, 因为 E_i 次正规于 E 而有 $CE_i(V_i) \leqslant O_p(E_i) = 1$ (见 6.3.1). 由 V_i 的不可约性得到 $V_i = [V_i, E_i]$. 因此 V_1V_2 和 E 满足假设, 可假定

$$V = V_1V_2.$$

首先假设 $V_1^E = V_1$. 那么 $V_1 \cap V_2$ 在 E_2 下是不变的, 从而由 (2) 和 (3) 得 $V_1 \cap V_2 = 1$. 由此得到 $V = V_1 \times V_2$ 且

$$[V, E_1, E_2] = [V_1, E_2] \leqslant V_1 \cap V_2 = 1.$$

于是 9.1.5 蕴含 $[E_1, E_2] \leqslant O_p(E) = 1$. 因此也有 $V_2^E = V_2$. 现在由对称的论证证明也有 $[V_2, E_1] = 1$, 从而 V 被 $E_1 \cap E_2$ 中心化. E 在 V 上的忠实作用给出 $E_1 \cap E_2 = 1$, 即有 $E = E_1 \times E_2$.

现在可假设 V_1 和 V_2 都不被 E 正规化. 特别地,

$$K := N_{E_2}(V_1) < E_2.$$

选择记号使

$$|V_1| \geqslant |V_2|.$$

设 $x \in E_2 \backslash K, E^* := \langle E_1, E_1^x \rangle$. 那么 E^* 在 E 中次正规 (见 6.7.1) 从而 $O_p(E^*) \leqslant O_p(E) = 1$. 因此, 用 (E_1, E_1^x, V_1, V_1^x) 替代 (E_1, E_2, V_1, V_2) 也满足假设. 又有因 $E \neq E_1$ 且 $E_1 \trianglelefteq\trianglelefteq E$ 而有 $E^* < E$. 由对 $|E|$ 的归纳法, 假设

$$E^* = E_1 \times E_1^x \text{ 且 } V_1 \cap V_1^x = 1.$$

特别地, 有

$$[V_1^x, E_1] = 1 \text{ 且 } V_1 \times V_1^x \leqslant V = V_1 V_2.$$

于是 $|V_1| \geqslant |V_2|$ 蕴含了

$$|V_1| = |V_2| \text{ 且 } V = V_1 \times V_2 = V_1 \times V_1^x.$$

当 $|E_2 : K| > 2$ 时, 存在 $y \in E_2 \backslash K$ 使 $V_1^x \neq V_1^y$. 将同上面那样的论证运用到 $(E_1^x, E_1^y, V_1^x, V_1^y)$ 上得

$$V = V_1 \times V_1^y = V_1^x \times V_1^y$$

且 $[V_1^y, E_1] = 1$. 这蕴含了 $[V, E_1] = 1$, 得到矛盾.

证明了 $|E_2 : K| = 2$, 特别有 $K \trianglelefteq E_2$ 且 $V_1^{xK} = V_1^x$. 由此得到

$$[V_1, K] \leqslant V_1 \cap V_2 = 1 \text{ 和 } [V_1^x, K] \leqslant V_1^x \cap V_2 = 1.$$

但是这证明了 $[V, K] = 1$, 从而 $K = 1$, $|E_2| = 2$, 和 (4) 矛盾. □

9.3.6 设 $A \in \mathcal{A}_V(H)_{\min}$ 且

$$E := [O_{p'}(H), A]A, \ F := C_H([V, E]).$$

(a) $E \cong \mathrm{SL}_2(p)$ 且 $p \in \{2, 3\}$.

(b) $V = [V,E] \times C_V(E)$ 且 $|[V,E]| = p^2$.

(c) $H = E \times F$ 且 $\mathcal{A}_V(H)_{\min} = \mathcal{A}_V(E) \cup \mathcal{A}_V(F)_{\min}$.

(d) $[V,F] \leqslant C_V(E)$ 且 $\mathcal{A}_V(F) = \mathcal{A}_{C_V(E)}(F)$.

证明　从 9.3.2(c) 得到

(′) $|A| = |[V,A]| = p$.

设 $Q := [O_{p'}(H), A]$, 且对 $x \in Q \backslash C_Q(A)$ 设 E_x, Q_x, V_x 同 9.3.3 中所定义. 将不加指出地用那里给出的 E_x 的性质.

由 A 在 $O_{p'}(H)$ 上的互素作用得

$$O_{p'}(H) = C_{O_{p'}(H)}(A)Q,$$

所以有

$$E = \langle E_x | x \in Q \backslash C_Q(A) \rangle \text{ 且 } O_p(E) = C_A(O_{p'}(H)) = 1.$$

取 $x, y \in Q \backslash C_Q(A)$. 那么 Q_x 和 Q_y 次正规于 $O_{p'}(H)$(见 9.3.4). 如果 $V_x \neq V_y$, 那么 $E_1 := Q_x$ 和 $E_2 := Q_y$ 满足 9.3.5 的假设. 因此 $V_x \cap V_y = 1$, 这和 $[V,A] \leqslant V_x \cap V_y$ 矛盾.

证明了对所有的 $x, y \in Q \backslash C_Q(A)$ 有 $V_x = V_y$. 特别地,

$$[V,Q] = [V,E] = V_x \cong C_p \times C_p.$$

于是由 8.4.2 得到

$\mathcal{Z}$　$V = [V,Q] \times C_V(Q)$

且 (′) 蕴含 $C_V(Q) = C_V(E)$. 由此得到

$$E = \mathrm{SL}(V_x) = E_x = E \text{ 和 } V = [V,E] \times C_V(E),$$

从而 (a) 和 (b) 成立.

因为 Q 是 H 的正规子群所以分解 $\mathcal{Z}$ 在 $O_{p'}(H)$ 下是不变的. 设 $B \in \mathcal{A}_V(H)_{\min}$ 且

$$\widetilde{Q} = [O_{p'}(H), B].$$

同上面, 对 A 和 Q 有

$$|[V,\widetilde{Q}]| = p^2 \text{ 且 } C_V(\widetilde{Q}) = C_V(B\widetilde{Q}),$$

并且由 9.3.3, $\widetilde{Q}$ 在 $[V,\widetilde{Q}]$ 上是不可约的. 由分解 $\mathcal{Z}$ 在 $\widetilde{Q}$ 下的不变性得到

$$[V,Q] = [V,\widetilde{Q}] \text{ 且 } C_V(Q) = C_V(\widetilde{Q})$$

或

$$[V,Q] \leqslant C_V(\widetilde{Q}) \text{ 且 } [V,\widetilde{Q}] \leqslant C_V(Q).$$

在两种情形下分解 Z 在 B 下都不变. 于是, 由 9.3.2(b) 得这个分解在 H 下也不变. 因为 $C_H(C_V(Q))$ 忠实地作用在 $[V,Q]$ 上, 还得到 $C_H(C_V(Q)) = E$ 及 $H = E \times F$, 并且 9.3.2(b) 蕴含

$$\mathcal{A}_V(H)_{\min} \subseteq \mathcal{A}_V(E) \cup \mathcal{A}_V(F).$$

这就是 (c) 且由 Z 的 H 不变性得到 (d). □

9.3.7 定理(Glauberman, [51]) 设 $E_1, \cdots, E_r$ 是形为 $[O_{p'}(H), A]A$, $A \in \mathcal{A}_V(H)_{\min}$ 的不同子群. 那么下面成立:

(a) $p \in \{2,3\}$.

(b) $H = E_1 \times \cdots \times E_r$ 且 $V = C_V(H) \times [V, E_1] \times \cdots \times [V, E_r]$. 特别地, 对 $j \neq i$, E_i 忠实地作用在 $[V, E_i]$ 上且平凡地作用在 $[V, E_j]$ 上.

(c) 对 $i = 1, \cdots, r$, $|[V, E_i]| = p^2$ 且 $E_i = \mathrm{SL}([V, E_i]) \cong \mathrm{SL}_2(p)$.

(d) 对所有的 $A \in \mathcal{A}_V(H)$ 有 $A = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{r} (A \cap E_i)$ 且 $|A||C_V(A)| = |V|$.

证明 由 9.3.6, $H = E_1 \times H_1$, 其中, $H_1 := C_H([V, E_1])$ 且 $(H_1, C_V(E_1))$ 满足 $\mathcal{S}_1 \sim \mathcal{S}_3$. 于是由初等的归纳法从 9.3.6 得到 (a)~(c). 断言 (d) 即是 9.3.2(b). □

根据 9.3.1, 应用 9.3.7 到 p 可分群上:

9.3.8 设 G 是 p 可分群且 $O_{p'}(G) = 1$, 但关于 p 不是 Thompson 可分解的. 设

$$V = \langle \Omega(Z(S)) | S \in \mathrm{Syl}_p G \rangle.$$

那么对 $H := J(G)C_G(V)/C_G(V)$, 9.3.7 的结论 (a)~(d) 成立. □

给出两个分别在第 12 章和第 11 章需要的推论.

9.3.9 设 G 是 p 可分群且 V 是 G 的使 $O_p(G/C_G(V)) = 1$ 的初等交换正规 p 子群. 那么对 $C := C_G(V)$ 有

$$[\Omega(Z(J(C))), J(G)] \leqslant V.$$

证明① 设 $H = J(G)C/C$. 如果 $H = 1$, 那么由 9.2.8(b) 得 $J(C) = J(G)$, 从而有

$$[\Omega(Z(J(C))), J(G)] = 1.$$

因此可假设 $H \neq 1$. 群对 (V, H) 满足条件 $\mathcal{S}_2$ 且由 6.4.3 也满足 $\mathcal{S}_1$, 且 9.2.9(a) 蕴含 $\mathcal{S}_3$. 应用 9.3.2(a). 那么对 $A \in \mathcal{A}(G)$ 有

$$|A/C_A(V)| = |AC/C| = |V/C_V(A)|.$$

① 证明用了 B.Baumann 的一个论证方法, 见文献 [26].

A 的极大性给出 $C_V(A) = V \cap A$, 从而有

$$|A| \geqslant |VC_A(V)| = |V/V \cap A||C_A(V)| = |A|.$$

由此得到

($'$) $VC_A(V) \in \mathcal{A}(C) \subseteq \mathcal{A}(G)$.

注意到 V 包含在 $V_0 := \Omega(Z(J(C)))$ 中, 所以由 ($'$) 有 $C_A(V) = C_A(V_0)$. 由于 9.2.9(a), 可对 A 和 V_0 应用 180 页 $\mathcal{Q}_1'$

$$|A/C_A(V)| = |V/C_V(A)| = |VC_{V_0}(A)/C_{V_0}(A)| \leqslant |V_0/C_{V_0}(A)|$$

$$\leqslant |A/C_A(V_0)| = |A/C_A(V)|.$$

这给出了 $V_0 = VC_{V_0}(A)$, 从而对 $A \in \mathcal{A}(G)$ 有 $[V_0, A] \leqslant V$. 于是得到 $[V_0, J(G)] \leqslant V$. □

9.3.10 设 X 是作用在 p 可分的 q' 群 G 上的初等交换 q 群 (q 是素数). 假设 $O_{p'}(G) = 1$.

(a) 对 $S \in \mathrm{Syl}_p G$ 有 $G = \langle N_G(J(S)), C_G(\Omega(Z(S))), C_G(X)\rangle$.

(b) 如果 G 关于 p 不是 Thompson 可分解的, 那么 $p = 2$ 或 $p = 3$ 且存在 $C_G(X)$ 的子群 W 和 D 使

$$W \cong C_p \times C_p, \ W^D = W \text{ 且 } D/C_D(W) \cong \mathrm{SL}_2(p).$$

证明 如果 G 是 Thompson 可分解的, 那么 (a) 显然成立. 于是假定 G 不是 Thompson 可分解的. 设 S 是 G 的 X 不变 Sylow p 子群 (见 8.2.3). 同 9.3.8 中, 设

$$V := \langle \Omega(Z(S))^G\rangle, \ C := C_G(V) \text{ 和 } H := J(G)C/C.$$

注意到半直积 XG 作用在 V 上. 根据 9.3.1 能够应用 9.3.7 到 H 上. 设 E_i 和 V_i, $i = 1, \cdots, r$, 的定义同 9.3.7 一样. 那么 X(由共轭) 作用在 $\mathcal{A}(G)$ 上从而也作用在 $\{E_1, \cdots, E_r\}$ 上. 选取符号使 $\{E_1, \cdots, E_k\}$ 在 X 下是一个轨道. 因为 $\pi(E_i) = \{2, 3\}$ 且 $(q, |G|) = 1$. 得到 $q \geqslant 5$. 因此, 由于 $|E_1| = 6$ 或 $|E_1| = 24$ 而有 $N_X(E_1)$ 平凡地作用在 E_1 上.

设

$$N := J(G)C, \ T := N \cap S \ (\in \mathrm{Syl}_p\, N) \text{ 和 } P := (TC/C) \cap E_1 \ (\in \mathrm{Syl}_p\, E_1).$$

因为 $E_1 = \langle P^{E_1}\rangle$, 所以应用 135 页 8.1.6 得到

$$E_1 \times \cdots \times E_k \leqslant \langle C_H(X), P^X\rangle.$$

对 $\{E_1, \cdots, E_r\}$ 的其他 X 轨道相应的结论也成立. 由此得到

$$H = \langle C_H(X), TC/C \rangle$$

因为 P^X 在 TC/C 中从而有

$$N = \langle C_N(X), T \rangle C.$$

于是 Frattini 论断蕴含

$$G = N_G(T)N \overset{9.2.8(\text{b})}{=} N_G(J(S))N = \langle N_G(J(S)), C, C_G(X) \rangle.$$

这就得到了 (a).

对于 (b) 的证明, 注意到 $N_X(V_i) = N_X(E_i)$ 且考虑

$$\langle V_1{}^X \rangle = V_1 \times \cdots \times V_k, \ \langle E_1{}^X \rangle = E_1 \times \cdots \times E_k.$$

设 $\mathcal{S}$ 是 $N_X(E_1)$ 在 X 中的代表系. 那么有

$$W := \left\{ \prod_{s \in \mathcal{S}} v^s | v \in V_1 \right\} \leqslant C_G(X) \quad (135 \text{ 页 } 8.1.6(\text{a})).$$

对相应的 $\langle E_1{}^X \rangle$ 中的对角线, 得到

$$\overline{D} := \left\{ \prod_{s \in \mathcal{S}} e^s | e \in E_1 \right\} \leqslant C_H(X).$$

这里 $\overline{D}$ 在 W 上的作用等价于 E_1 在 V_1 上的作用. 于是 $W \cong V_1$ 且 $\overline{D} \cong \mathrm{SL}(W)$. 由 X 在 $\overline{D}$ 上的互素作用得 $C_N(X)$ 有子群 D 使 $DC/C = \overline{D}$. 这蕴含 (b).

9.4 一个特征子群

设 p 是素数, G 是使 $O_{p'}(G) = 1$ 的群且 $S \in \mathrm{Syl}_p G$. 如果

$$G = N_G(J(S))C_G(\Omega(Z(S))),$$

则由定义 G 关于 p 是 Thompson 可分解的. 本节研究的问题是在怎样的附加假设下 S 会有一个在 G 中正规的非平凡特征子群.

对这个问题, 最重要且最著名的结果就是 Glauberman 的 ZJ 定理 [50]. 它说明了只要 G 使 $C_G(O_p(G)) \leqslant O_p(G)$ 且 G 在含在 $O_p(G)$ 中的 G 的主因子上的作用是 p 稳定的. 注意到 $Z(J(S))$ 的定义只依赖 S 而不依赖 G.

本节用不同的方法证明一个类似于 Glauberman 的 ZJ 定理的结果. 不去证明 S 的给定的特征子群有所要的性质, 而是用 $Z(J(S))$ 的合适的子群来逼近这样的子群.

下面设 S 是 p 群. 记 $\mathcal{C}_J(S)$ 为所有满足下面 4 个条件的 (τ, H) 配对的集合①:

$\mathcal{C}_1$　H 是一个使 $C_H(O_p(H)) \leqslant O_p(H)$ 的群, 且 τ 是从 S 到 H 的单同态.

$\mathcal{C}_2$　S^τ 是 H 的 Sylow p 子群.

$\mathcal{C}_3$　$J(S^\tau)$ 是 H 的正规子群.

$\mathcal{C}_4$　H 在每一个包含在 $\Omega(Z(J(S^\tau)))$ 中的 H 的正规子群上都是 p 稳定的.

显然 (id, S) 在 $\mathcal{C}_J(S)$ 中.

对于 p 群 P, 令

$$A(P) := \Omega(Z(P)) \text{ 和 } B(P) := \Omega(Z(J(P))).$$

那么对 P 的每一个同构 η 有 $A(P^\eta) = A(P)^\eta$ 且 $B(P^\eta) = B(P)^\eta$.

现在递归地定义子群 $W(S) \leqslant B(S)$. 设

$$W_0 := A(S) \leqslant B(S).$$

假定对 $i \geqslant 1$, 满足

$$A(S) = W_0 < W_1 < \cdots < W_{i-1} \leqslant B(S)$$

的子群 $W_1, \cdots, W_{i-1}$ 已定义. 如果对所有的 $(\tau, H) \in \mathcal{C}_J(S)$ 有 ${W_{i-1}}^\tau \trianglelefteq H$, 那么定义 $W(S) := W_{i-1}$. 在另外情形, 选取 $(\tau_i, H_i) \in \mathcal{C}_J(S)$ 使 ${W_{i-1}}^{\tau_i}$ 在 H_i 中不正规, 定义

$$W_i := \langle ({W_{i-1}}^{\tau_i})^{H_i} \rangle^{\tau_i^{-1}}.$$

注意到在这种情形下有

$$A(S^{\tau_i}) \leqslant {W_{i-1}}^{\tau_i} < {W_i}^{\tau_i} \leqslant B(S^{\tau_i}) \overset{\mathcal{C}_3}{\trianglelefteq} H_i,$$

从而

$$A(S) \leqslant W_{i-1} < W_i \leqslant B(S).$$

因为 $B(S)$ 是有限的, 所以存在整数 m 使这个递归定义终止, 即有

$$W(S) := W_m.$$

那么有

① 于是 $(\tau, H) \in \mathcal{C}_J(S)$ 意味着对 (τ, H), $\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_4$ 成立.

$\mathcal{R}$ $A(S) = W_0 < \cdots < W_i < \cdots < W_m = W(S) \leqslant B(S)$ 且

(′) 对所有的 $(\tau, H) \in \mathcal{C}_J(S)$, 有 $W(S)^\tau \trianglelefteq H$.

乍看起来, $W(S)$ 的定义似乎依赖于 (τ_i, H_i) 配对的选择. 但如果对合适的 $(\widetilde{\tau_i}, \widetilde{H_i})$ 配对, $i = 0, \cdots, \widetilde{m}$, 用类似的方法定义

$$W_0 = \widetilde{W}_0 < \cdots < \widetilde{W}_{\widetilde{m}} =: \widetilde{W}(S).$$

那么由 (′) 知 $\widetilde{W}(S) \leqslant W(S)$. 对称的讨论证明也有 $W(S) \leqslant \widetilde{W}(S)$ 从而 $W(S) = \widetilde{W}(S)$.

设 η 是 S 的同构. 那么

$$(\tau, H) \mapsto (\eta^{-1}\tau, H)$$

定义了从 $\mathcal{C}_J(S)$ 到 $\mathcal{C}_J(S^\eta)$ 的双射, 且列 $\mathcal{R}$ 对应于

$$A(S^\eta) = A(S)^\eta = {W_0}^\eta < \cdots < {W_m}^\eta = W(S)^\eta \leqslant B(S)^\eta = B(S^\eta).$$

由此得到

9.4.1 设 η 是 S 的同构. 那么 $W(S^\eta) = W(S)^\eta$. 特别地, $W(S)$ 是 S 的满足

$$W(S) \neq 1 \Leftrightarrow S \neq 1$$

的一个特征子群. □

从 $\Omega(Z(S)) \leqslant W(S)$ 及若 $S \neq 1$ 则 $Z(S) \neq 1$, 得到附加结论.

9.4.2 设 $x \in S$ 使 $[W(S), x, x] = 1$. 那么 $[W(S), x] = 1$.

证明 对 $W_0 \in \mathcal{R}$ 及任意的 $x \in S$ 都有 $[W_0, x] = 1$. 假定 S 是一个反例. 那么存在 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 使蕴含关系

$$[W_i, x, x] = 1, \quad x \in S \Rightarrow [W_i, x] = 1$$

不成立. 选取极小的使上述蕴含关系不成立的 i. 那么有

(+) $[W_{i-1}, x] \neq 1$, $x \in S \Rightarrow [W_{i-1}, x, x] \neq 1$.

设 $y \in S$ 使 $[W_i, y, y] = 1$ 但 $[W_i, y] \neq 1$. 对 $a := y^{\tau_i}$, 有

$$[{W_i}^{\tau_i}, a, a] = 1 \text{ 但 } [{W_i}^{\tau_i}, a] \neq 1,$$

其中, (τ_i, H_i) 是在 W_i 的构造中用到的配对.

设 $C := C_{H_i}({W_i}^{\tau_i})$ 且 $C \leqslant L \leqslant H_i$ 使 $L/C = O_p(H_i/C)$. 那么 $\mathcal{C}_4$ 蕴含 $aC \in O_p(H_i/C)$, $P := S^{\tau_i} \cap L$ 是 L 的 Sylow p 子群, 所以有 $L = CP$. 由 Frattini 论断得到 $H_i = N_{H_i}(P)L = N_{H_i}(P)C$, 从而有

$${W_i}^{\tau_i} = \langle ({W_{i-1}}^{\tau_i})^{N_{H_i}(P)} \rangle.$$

因此存在 $h \in N_{H_i}(P)$ 使

$$[(W_{i-1}{}^{\tau_i})^h, a] \neq 1.$$

对 $x := (a^{h^{-1}})^{\tau_i^{-1}}$, 有 $[W_{i-1}, x] \neq 1$. 因为

$$[W_{i-1}, x, x] = [(W_i{}^{\tau_i})^h, a, a]^{h^{-1}\tau_i^{-1}} \leqslant [W_i^\tau, a, a]^{h^{-1}\tau_i^{-1}} = 1$$

所以这和 (+) 矛盾. □

由于技巧方面的原因, 本节主要定理的证明还需要研究除 $\mathcal{C}_J(S)$ 外所有满足下面条件的配对 (τ, H) 的类 $\mathcal{C}_0(S)$:

$\mathcal{C}_0 1$　H 是使 $C_H(O_p(H)) \leqslant O_p(H)$ 的群, 且 $\tau : S \to H$ 是单同态.

$\mathcal{C}_0 2$　S^τ 是 H 的 Sylow p 群.

$\mathcal{C}_0 3$　$J(S^\tau)$ 不正规于 H 且 $(\tau, N_H(J(S^\tau))) \in \mathcal{C}_J(S)$.

$\mathcal{C}_0 4$　H在它的每一个初等交换正规p子群和 $O_p(H)/\Phi(O_p(H))$ 上是p稳定的.

9.4.3　对每一个 $(\tau, H) \in \mathcal{C}_0(S)$, $W(S)^\tau$ 正规于 H.

证明　设 $(\tau, H) \in \mathcal{C}_0(S)$ 且

$$W := W(S)^\tau.$$

因为 $O_p(H)^{\tau^{-1}} \leqslant S$ 且 $W(S) \trianglelefteq S$, 所以有 $[O_p(H), W] \leqslant W \cap O_p(H)$, 即

(1) $[O_p(H), W, W] = 1$.

由于 $\mathcal{C}_0 4$, 对 $V := O_p(H)/\Phi(O_p(H))$ 这蕴含

$$WC_H(V)/C_H(V) \leqslant O_p(H/C_H(V)),$$

从而由 $\mathcal{C}_0 1$ 和 142 页 8.2.9(b) 得 $W \leqslant O_p(H)$. 此外由 $W^{\tau^{-1}} \leqslant O_p(H)^{\tau^{-1}}$ 和 $W^{\tau^{-1}} \trianglelefteq S$ 得 $W \trianglelefteq O_p(G)$, 从而对所有的 $h \in H$ 有 $W^h \trianglelefteq O_p(G)$. 由此得到

$$[W, W^h, W^h] = 1 \text{ 且 } [W(S), (W^h)^{\tau^{-1}}, (W^h)^{\tau^{-1}}] = 1.$$

于是由 9.4.2 得到

$$[W(S), (W^h)^{\tau^{-1}}] = 1 \text{ 和 } [W, W^h] = 1.$$

因此

$$W^* := \langle W^H \rangle$$

是初等交换的.

首先假定 $[W^*, J(S^\tau)] = 1$. 那么对 $h \in H$ 也有 $[W^*, J(S^\tau)^h] = 1$, 所以 $[W^*, J(H)] = 1$. 因为 $J(S^\tau) \leqslant J(H)$, 所以存在 $T \in \mathrm{Syl}_p J(H)$ 使 $J(S^\tau) = J(T)$. Frattini 论断蕴含

$$H = J(H)N_H(T) = J(H)N_H(J(S^\tau)) = C_H(W^*)N_H(J(S^\tau)),$$

从而 $W^* = \langle W^{N_H(J(S^\tau))}\rangle$. 由 $\mathcal{C}_03$ 得 $(\tau, N_H(J(S^\tau))) \in \mathcal{C}_J(S)$ 从而 $W = W(S)^\tau \trianglelefteq N_H(J(S^\tau))$, 所以有 $W = W^*$, W 正规于 H.

现在假定 $[W^*, J(S^\tau)] \neq 1$, 证明由此导出矛盾. 设 $C_H(W^*) \leqslant L \leqslant H$ 使

$$L/C_H(W^*) = O_p(H/C_H(W^*))$$

和 $P := S^\tau \cap L$. 由 Frattini 论断得到

$$H = LN_H(P) = C_H(W^*)N_H(P),$$

从而有

(′) $W^* = \langle W^{N_H(P)}\rangle$.

由 $\mathcal{C}_04$ 和 9.2.10 得存在 $A^* \in \mathcal{A}(S^\tau)$ 使 $[W^*, A^*] \neq 1$ 且 $A^* \leqslant P$. 这蕴含了 $A^* \leqslant J(P) \leqslant J(S^\tau)$, 所以 $[W, J(P)] = 1$. 由 (′) 得到

$$[W^*, A^*] \leqslant [W^*, J(P)] = 1,$$

这和 $[W^*, A^*] \neq 1$ 矛盾. □

如果下面两个条件成立, 说群 G(其中, $S \in \mathrm{Syl}_p G$) 是 p 稳定的.

- G 在其每一个正规初等交换 p 子群和 $O_p(G)/\Phi(O_p(G))$ 上是 p 稳定的.
- $N_G(J(S))$ 在其每一个包含在 $\Omega(Z(J(S)))$ 中的正规子群上是 p 稳定的.

9.4.4 定理 [85] 设 S 是一个 p 群. 那么存在 S 的特征子群 $W(S)$ 满足

(a) $\Omega(Z(S)) \leqslant W(S) \leqslant \Omega(Z(J(S)))$.

(b) 如果 G 是使 $C_G(O_p(G)) \leqslant O_p(G)$ 的 p 稳定群且 S 是 G 的 Sylow p 子群, 那么 $W(S)$ 是 G 的正规子群.

(c) 对 S 的每一个同构 η 有 $W(S^\eta) = W(S)^\eta$.

证明 设 $W(S)$ 的定义同上面. 由 9.4.1 只需要证明 (b). 设 G 同 (b) 中的. 如果 $J(S)$ 正规于 G, 那么 (id, G) 在 $\mathcal{C}_J(S)$ 中. 在这种情况下 $W(S)$ 的构造表明了 $W(S)$ 正规于 G. 如果 $J(S)$ 不正规于 G, 那么 (id, G) 在 $\mathcal{C}_0(S)$ 中, 从 9.4.3 得到 (b). □

这里再次强调在 (b) 中子群 $W(S)$ 只依赖 S 而不依赖 G. 于是给定群 Y 和 $S \in \mathrm{Syl}_p Y$, 则 Y 的所有满足

$$S \leqslant M \text{ 且 } C_M(O_p(M)) \leqslant O_p(M)$$

的 p 稳定子群 M 都包含在 $N_Y(W(S))$ 中.

关于 p 稳定性概念有 (见 8.6.12)

9.4.5 设 $p \neq 2$. 群 G 是 p 稳定的, 如果 G 满足下列条件之一:

(1) G 是 p 可分的且 $p \geqslant 5$.

(2) G 是奇阶群.

(3) G 有交换的 Sylow 2 子群. □

如果用 8.6.13 后面引用的 Dickson 定理, 那么 9.4.5 中的条件 (3) 可被下面的 (3′) 替代:

(3′) G 中没有和 $\mathrm{SL}_2(p)$ 同构的截断.

注意到 172 页 9.1.1 前面的 p 稳定性只对 $p \neq 2$ 时有意义. 但是, 如果用条件 (3′) 代替 p 稳定性 (例如, 在 9.4.4(b) 中), 那么对 $p = 2$ 也可以得到非平凡的结果, 见 [53] 和 [88]①.

后面将用到下面的推论:

9.4.6 设 G 是 p 可分的且 $S \in \mathrm{Syl}_p G$, 其中, $p \geqslant 5$. 那么 $G = O_{p'}(G)N_G(W(S))$.

证明 设 $\overline{G} := G/O_{p'}(G)$. 那么 $\overline{S} \in \mathrm{Syl}_p\overline{G}$ 且由 9.4.4(c) 得

$$W(\overline{S}) = \overline{W(S)}.$$

从 9.4.4(b) 以及 9.4.5(1) 和 103 页 6.4.4(a) 得到 $\overline{W(S)}$ 是 $\overline{G}$ 的正规子群, 即

$$O_{p'}(G)W(S) \trianglelefteq G.$$

于是从 Frattini 论断得到结论. □

以 Thompson 的一个定理来结束本节内容. 这个定理的证明可以被看成是现代群论的起点. 它包含了在本章中所叙述的思想的核心. 建议读者阅读 [91] 和 [92]. 因为那时还没有 ZJ 定理 (或 9.4.4), 所以这个定理的原始版本和在这里给出的是不一样的.

9.4.7 Thompson 正规 p 补定理 设 G 是群, $S \in \mathrm{Syl}_p G$, 其中, p 是奇素数. 如果 $N_G(W(S))$ 有正规 p 补, 那么 G 有正规 p 补.

证明 首先注意到具有正规 p 补的群的子群和商群都有正规 p 补. 现在设 G 是极小反例, $\mathcal{K}$ 是 G 的所有具有正规 p 补的子群的集合. G 的极小性蕴含

(1) $S \leqslant G_1 < G \Rightarrow G_1 \in \mathcal{K}$.

设 $N := O_{p'}(G)$ 且 $\overline{G} := G/N$. 假设 $N \neq 1$. 那么 $\overline{S}$ 是 $\overline{G}$ 的同构于 S 的 Sylow p 子群. 特别地, 由 9.4.1, $W(\overline{S}) = \overline{W(S)}$. 于是 3.2.8 表明了

$$N_{\overline{G}}(W(\overline{S})) = \overline{N_G(W(S))}.$$

因此由上面的评注, $N_{\overline{G}}(W(\overline{S}))$ 有正规 p 补; 所以 $\overline{G}$ 满足假设. 如果 $|\overline{G}| < |G|$, 那么由归纳法得 $\overline{G}$ 有正规 p 补, 从而因 N 是 G 的正规 p' 子群得 G 也有正规 p 补. 因为 G 是反例, 所以有

① 这篇论文运用了和 9.4.4 的证明一样的方法.

(2) $O_{p'}(G) = 1$.

由 Frobenius 正规 p 补定理 (见 7.2.4), 使 $N_G(W) \notin \mathcal{K}$ 的非平凡 p 子群 W 的集合 $\mathcal{W}$ 非空. 选取 $P \in \mathcal{W}$ 使 $|N_G(P)|_p$ 极大, 证明

(3) $P \trianglelefteq G$, 特别 $O_p(G) \neq 1$.

在 (3) 的反例的情况下, $G_1 := N_G(P) \neq G$. 由 G 中适当元素对 P 作共轭, 即可假定 $T := N_G(P) \cap S$ 是 G_1 的 Sylow p 子群. 那么由 (1) 得到 $T \neq S$ 从而 $T < N_S(T)$(见 48 页 3.1.10). 对 T 的每一个特征子群 U, 特别是 $U = W(T)$, 得到 $T < N_S(T) \leqslant N_G(U)$. 于是 $|N_G(P)|_p$ 的极大性蕴含了 $N_G(W(T)) \in \mathcal{K}$, 从而也有 $N_{G_1}(W(T)) \in \mathcal{K}$. 因此, 因为 $|G_1| < |G|$ 且 G 是极小反例, 由归纳法得 G_1 有正规 p 补. 那么子群 $P \leqslant G_1$ 也有正规 p 补, 这和 $P \in \mathcal{W}$ 矛盾. 这个矛盾证明了断言 (3).

设

$$\overline{G} := G/O_p(G),$$

N 是 $N_{\overline{G}}(W(\overline{S}))$ 在 G 中的逆像. 由 (3), $|\overline{G}| < |G|$. 另一方面, 因为 $O_p(\overline{G}) = 1$ 且 $W(\overline{S}) \neq 1$ 所以 $\overline{N} < \overline{G}$, 因此 $N < G$. 于是 (1) 蕴含 N 有正规 p 补. 因为 G 是极小反例, 推出 $\overline{G}$ 有正规 p 补. 这和 (2) 一起得到

(4) $C_G(O_p(G)) \leqslant O_p(G)$ 且 $\overline{G}$ 有正规 p 补 $\overline{K}$. 特别 G 是 p 可分的.

如果 G 是 p 稳定的, 那么 9.4.4 蕴含 $G = N_G(W(S))$, 这和 $G \notin \mathcal{K}$ 矛盾. 于是 G 不是 p 稳定的, $\overline{K}$ 有非交换 Sylow 2 子群. 因为 $|\overline{S}|$ 和 $|\overline{K}|$ 互素所以 $\overline{K}$ 中存在 $\overline{S}$ 不变的 Sylow 2 子群 $\overline{T}$(见 8.2.3). 那么 $Z(\overline{T})$ 也是 $\overline{S}$ 不变的.

设 U 是 $Z(\overline{T})\overline{S}$ 在 G 中的逆像. 那么因为 T 是非交换的而有 $U \neq G$, (1) 表明 U 有正规 p 补 $U_0 \neq 1$. 从

$$[U_0, O_p(G)] \leqslant U_0 \cap O_p(G) = 1$$

得到 $U_0 \leqslant C_G(O_p(G)) \nleqslant O_p(G)$, 这和 (4) 矛盾. 这个最终的矛盾证明了 G 不是反例. □

9.5 无不动点作用

8.1 节中曾指出, 一个群若具有素数阶无不动点自同构, 一定是幂零的, 本节中将利用 9.4.7 证明这一结论. 然后利用这一点讨论一个具有广泛意义的"后–分类定理"(post-classification theorem)[①] 的结果, 即证明任意具有无不动点自同构的群必定是可解的.

① 就是说, 一个证明中运用了单群分类定理的定理.

应该指出的是, 如果把 9.4.7 看成是当然成立的, 那么本节独立于本章的其他节.

9.5.1 定理(Thompson, [90]) 每一个具有素数阶无不动点自同构的群是幂零的.

证明 设 G 是群, α 是素数阶的无不动点自同构. 那么 G 是 p' 群 (见 135 页 8.1.4). 现在设 G 是极小阶反例. 那么得到

(1) 如果 $N < G$ 使 $N^\alpha = N$, 那么 N 是幂零的.

(2) 如果 N 是 G 的非平凡真 α 不变正规子群, 那么 G/N 是幂零的且 G 可解 (见 94 页 6.1.2).

对 (2), 注意到 $\langle\alpha\rangle$ 无不动点地作用在 G/N 上 (见 8.2.2 或 8.1.11(c)).

首先处理 G 可解的情形. 此时 G 包含一个极小的 α 不变正规子群 V 且 V 是初等交换 q 群[①]. 因为由 (2) 知 G/V 是幂零的但 G 不是, 所以得到 $C_G(V) \neq G$(见 79 页 5.1.2). 再次由 (2) 得到

$$\overline{G} := G/C_G(V)$$

是幂零的, 从而存在素数 r 使

$$\overline{G}_1 := O_r(\overline{G}) \neq 1.$$

于是 135 页 8.1.5 蕴含 $r \neq q$, 并且因为 $C_V(\overline{G}_1)$ 是 G 的 α 不变正规子群且 $C_G(V) \neq G$ 而有 $C_V(\overline{G}_1) = 1$. α 的每一个非平凡方幂在 $\overline{G}_1$ 上也是无不动点的. 因此, 半直积 $\langle\alpha\rangle\overline{G}_1$ 是 Frobenius 补为 $\langle\alpha\rangle$ 的 Frobenius 群 (见 8.1.12). 但是现在由 8.3.5 有 $1 \neq C_V(\alpha)$, 矛盾.

证明了极小反例 G 不是可解的. 根据 (1) 和 (2), 这蕴含了 G 不包含任何非平凡 α 不变真正规子群. 于是由归纳法有

(3) 如果 $1 \neq U < G$ 使 $U^\alpha = U$, 那么 $N_G(U)$ 是幂零的.

因为 G 非可解, 所以存在 $|G|$ 的奇素因子 q 和 G 的 α 不变 Sylow q 子群 Q(见 8.2.3). 那么 α 使 Q 的每一个特征子群 W 都不变, 从而也使 $N_G(W)$ 是不变的. 根据 (3), 如果 $W \neq 1$ 那么 $N_G(W)$ 是幂零的, 又幂零群有正规 q 补. 因此, Thompson 正规 p 补定理 9.4.7(这里用 q 代替 p) 证明了 G 有正规 q 补. 因为这个补在 G 中是特征的, 所以在 α 下是不变的. 但这和 (3) 矛盾. □

从 8.1.12, 作为推论得到 (用 Frobenius 定理 4.1.6)

9.5.2 Frobenius 群的 Frobenius 核是幂零的.

构造具有合数阶的无不动点自同构但非幂零的可解群并不是很难的. 每一个具有无不动点自同构的群是可解的这个猜想, 只能够通过有限单群分类定理来证明. 下面把这个结果作为典型的**后单群分类定理**来讨论.

---

① V 是半直积 $\langle\alpha\rangle G$ 的极小正规子群.

8.1.11 证明了自同构的无不动点作用和互素作用具有一些共同的基本性质.

设 $\mathcal{E}$ 是满足

$$\text{存在 } p \in \pi(E), \text{使 } E \text{ 中包含循环的 Sylow } p \text{ 子群}$$

的单群组成的群类.

设 $\mathcal{K}$ 是所有合成因子都在 $\mathcal{E}$ 中的群组成的群类.

从有限单群分类定理知道每一个单群都在 $\mathcal{E}$ 中, 所以 $\mathcal{K}$ 是所有有限群组成的群类. 用这个结果, 下面的定理证明了上面所提到的猜想.

9.5.3 设 $G \in \mathcal{K}$ 且 A 是无不动点作用在 G 上的群, 即 $C_G(A) = 1$. 假设若 A 非循环则 A 在 G 上的作用是互素的. 那么 G 是可解的[①].

证明 设 G 是极小反例. 如果 G 包含一个 A 不变的正规子群使 $1 \neq N \neq G$, 那么由 138 页 8.1.11 和 8.2.2 可分别对 N 和 G/N 运用纳法. 于是 N 和 G/N 是可解的, 从而 G 不是反例 (见 6.1.2).

于是 G 是半直积 AG 的极小非可解正规子群. 由 1.7.3, 存在 G 的非可解单子群 E 使

$$G = E_1 \times \cdots \times E_n \text{ 且 } E^A = \{E_1, \cdots, E_n\}.$$

A 在 G 上的无不动点作用蕴含 $N_A(E_1)$ 在 E_1 上的作用是无不动点的 (见 135 页 8.1.6). 如果 $E_1 \neq G$, 那么由归纳法知 E_1 是可解的, 得到矛盾. 因此 $G = E_1$ 是 $\mathcal{E}$ 中的单群. 设 $p \in \pi(G)$ 使 $P \in \mathrm{Syl}_p G$ 循环. 由 8.1.11(b) 或者 8.2.3 可假设 $P^A = P$. 那么 A 作用在 $N_G(P)/C_G(P)$ 上, 且因为循环群的自同构是交换群得到这个作用是平凡的. 另一方面, A 无不动点作用地作用在 $N_G(P)/C_G(P)$ 上 (见 8.1.11(c) 和 8.2.3) 得到 $N_G(P) = C_G(P)$. 于是 Burnside 定理 (见 130 页 7.2.1) 证明了 G 有正规 p 补. 这和 G 的单性矛盾. □

① 因为每一个使 $Z(G) = 1$ 的群 G 都无不动点作用地在自身上, 所以在循环情形下假设 $(|G|, |A|) = 1$ 是必要的.

第 10 章　p 局部子群的嵌入

设 p 是素数, G 是群. 对于 G 的一个子群 M, 如果 G 中存在非平凡 p 子群 P 使 $N_G(P)=M$, M 就叫做 G 的 p **局部子群** (local subgroup). 显然有

$$1 \neq P \leqslant O_p(M).$$

常见到, 如在 Grün 定理以及 Frobenius 和 Thompson 的正规 p 补定理中, p 局部子群的结构和 G 的结构具有很强的联系. 对这个关系的研究是最后 3 章的主要课题.

10.1 节将通过第 9 章介绍的二次作用来研究 p 局部子群. 10.2 节通过对 p^aq^b 定理的证明来展示怎样运用这些结论. 10.3 节介绍一个方法 —— 融合方法 (amalgam method), 它使得能够通过适当的陪集图 (coset graphs) 来研究群.

如果群 M 满足

$$C_M(O_p(M)) \leqslant O_p(M).$$

说 M 具有**特征**(characteristic)p. 根据 6.5.8, 这个性质等价于

$$F^*(M)=O_p(M),$$

从而对 p 可分群 M 来说等价于

$$O_{p'}(M)=1,$$

见 103 页 6.4.3. 设 M 是 G 的真子群且 $p\in\pi(M)$. 如果

$$|M\cap M^g|_p=1, \quad \forall g\in G\backslash M^{①}.$$

那么 M 叫做在 G 中是**强 p 嵌入的**(strongly p-embedded). 如果 G 的特征是 p 的 p 局部子群 (特别当 $p=2$ 时) 在 G 中非强 p 嵌入的, 那么可推导出关于它们的一些结论. 具有强 2 嵌入子群的群已经被 Bender[29] 分类了. 他的结果是群论的基本定理之一, 见附录.

10.1　本　原　对

在 6.6 节中, 设 M 是 G 的真子群, 如果对 M 的每一个非平凡正规子群 A 有 $M=N_G(A)$, 那么称 M 是本原的. 现在假设 M_1, M_2 是 G 的两个本原子群. 那么对 $\{i,j\}=\{1,2\}$ 有

---

① 对 $n\in\mathbb{N}$ 用 n_p 来记整除 n 的最大 p 幂.

$\mathcal{P}$　$1 \neq A \trianglelefteq M_i,\ A \leqslant M_1 \cap M_2 \Rightarrow N_{M_j}(A) = M_1 \cap M_2$.

这个基本性质给出了下面的推广：

设 M_1, M_2 是 G 的两个不同但不一定本原的子群. 如果对 $\{i,j\} = \{1,2\}$, $\mathcal{P}$ 成立, 那么 (M_1, M_2) 叫做 G 的**本原对**(primitive pairs).

设 (M_1, M_2) 是一个本原对. 如果 M_1 和 M_2 是可解的, 那么称 (M_1, M_2) 为**可解的**; 如果 M_1 和 M_2 具有特征 p 且还有

$$O_p(M_1)O_p(M_2) \leqslant M_1 \cap M_2,$$

那么称 (M_1, M_2)**具有特征** p.

首先注意到

10.1.1　设 M 是特征为 p 的群. 假设 U 是 M 的使 $U \trianglelefteq\trianglelefteq M$ 或 $O_p(M) \leqslant U$ 的子群. 那么 U 具有特征 p.

证明　在情形 $O_p(M) \leqslant U$ 时是显然的. 在另一种情形时, 从 6.5.7(b) 得到论断. □

下面的结论是证明怎样获得特征为 p 的本原对.

10.1.2　M_1, M_2 是 G 的两个不同的具有特征 p 的极大 p 局部子群. 假设 M_1 和 M_2 有共同的 Sylow p 子群. 那么 (M_1, M_2) 是特征为 p 的本原对.

证明　设 $1 \neq A \trianglelefteq M_i$ 且 $A \leqslant M_i \cap M_j$, $i \neq j$. 由 10.1.1 得 $1 \neq O_p(A) (\trianglelefteq M_i)$, 从而由 M_i 的极大性有

$$M_i = N_G(O_p(A)).$$

因此 $N_{M_j}(A) = M_i \cap M_j$, 这就是 $\mathcal{P}$.

设 S 是 M_1 和 M_2 的共同 Sylow p 子群. 那么

$$O_p(M_1)O_p(M_2) \leqslant S \leqslant M_1 \cap M_2.$$ □

10.1.3　设 $p \in \pi(G)$. 假设 G 的每一个 p 局部子群具有特征 p 且 $O_p(G) = 1$. 那么有下面之一成立:

(a) G 中存在特征为 p 的本原对.

(b) G 的每一个极大 p 局部子群在 G 中都是强 p 嵌入的.

证明　设 M 是 G 的极大 p 局部子群. 那么 $O_p(M) \neq 1$ 从而

$$N_G(M) \leqslant N_G(O_p(M)) = M < G,$$

特别地, 对所有的 $g \in G \backslash M$ 有 $M^g \neq M$. 并且也有 M^g 是极大 p 局部子群.

在 G 的所有和 M 不同的极大 p 局部子群 L 中选取 L 使 $|M \cap L|_p$ 是极大的.

首先处理 $|M \cap L|_p \neq 1$ 的情形. 设

$$T \in \mathrm{Syl}_p(M \cap L), \quad U := N_G(T).$$

因为 U 是 p 局部子群所以存在 G 的极大 p 局部子群 H 使 $U \leqslant H$. 显然有 $H \neq L$ 或 $H \neq M$. 可以假定 $H \neq M$(用 L 代替 M, 以对称论证可得出 $H = M$ 时的情形). 设 $T \leqslant S \in \mathrm{Syl}_p\, M$. 如果 $T < S$, 从 3.1.10 得到

$$T < N_S(T) \leqslant H \cap M,$$

这和 $|M \cap L|_p$ 的极大性矛盾. 于是有

($'$) $T \in \mathrm{Syl}_p\, M$.

如果也有 $T \in \mathrm{Syl}_p\, L$, 那么从 10.1.2 得 (a). 因此可假定

$$T < S_1 \in \mathrm{Syl}_p\, L.$$

那么存在 $g \in S_1 \backslash T \subseteq G \backslash M$ 使 $T^g = T$ 且 $M \neq M^g$(见 3.1.10). 于是再次由 10.1.2 得 (M, M^g) 是特征为 p 的本原对.

如果 $|M \cap L|_p \neq 1$ 那么已证明了 (a) 成立. 因此假设只要 M 和 L 是的两个不同的极大 p 局部子群就会有 $|M \cap L|_p = 1$. 于是对每一个 $g \in G \backslash M$ 有 $|M \cap M^g|_p = 1$, 从而 M 在 G 中是强 p 嵌入的. □

下面定理的另一个版本叫做 Thompson-Wielandt 定理.

10.1.4　定理(Bender, [28])　设 (M_1, M_2) 是 G 的本原对. 假设 $F^*(M_1) \leqslant M_2$ 且 $F^*(M_2) \leqslant M_1$. 那么存在素数 p 使 (M_1, M_2) 的特征是 p.

证明　由假设得到

$$F^*(M_1)F^*(M_2) \trianglelefteq M_1 \cap M_2$$

从而由 111 页 6.5.7(b) 得

($'$) $F^*(M_1)F^*(M_2) \leqslant F^*(M_1 \cap M_2)$.

因此, M_1 的一个分支 K 也是 $M_1 \cap M_2$ 的分支且正规化 $F^*(M_2)$. 如果 $[F^*(M_2), K] = 1$, 那么 $K \leqslant Z(F^*(M_2))$ (见6.5.8), 这和 $K' = K$ 矛盾. 于是 6.5.2 蕴含 $K \leqslant F^*(M_2) \leqslant M_1$, 所以有

$$K \trianglelefteq\trianglelefteq F^*(M_2) \trianglelefteq M_2.$$

特别地, K 也是 M_2 的分支. 由此得到 $E(M_1) \leqslant E(M_2)$ 且由对称的论证得 $E(M_2) \leqslant E(M_1)$, 即有 $E(M_1) = E(M_2)$. (M_1, M_2) 的本原性表明了 $E(M_1) = E(M_2) = 1$ 从而有

$$F^*(M_i) = F(M_i), \quad i = 1, 2.$$

特别地, 由 (′) 得 $F^*(M_1)F^*(M_2)$ 是幂零的. 设 $p \in \pi(F(M_1))$. 因为 $O_p(M_1)$ 中心化 $M_1 \cap M_2$ 的每一个正规 p' 子群, 所以从 6.1.4 得到

$$\pi(F(M_1)) = \pi(F(M_2)).$$

假设 (M_1, M_2) 是反例, 那么存在

$$q \in \pi(F(M_1)), \quad q \neq p.$$

设

$$Y_1 := [M_1, O_p(M_2), O_p(M_2)], \quad Y_2 := [M_2, O_p(M_1), O_p(M_1)].$$

首先证明情形

(″) $Y_1Y_2 \leqslant M_1 \cap M_2$,

导出矛盾. 这种情形下, $O_p(M_1)$ 被 Y_2 正规化. 于是得到次正规列

$$O_p(M_1) \trianglelefteq O_p(M_1)Y_2 \overset{1.5.5}{\trianglelefteq} O_p(M_1)[M_2, O_p(M_1)] \overset{1.5.5}{\trianglelefteq} M_2,$$

这证明了 $O_p(M_1) \leqslant O_p(M_2)$. 用 $O_p(M_2)$ 和 Y_1 替换 $O_p(M_1)$ 和 Y_2, 由对称论证也得到 $O_p(M_2) \leqslant O_p(M_1)$, 所以 $O_p(M_1) = O_p(M_2)$. 这和 (M_1, M_2) 的本原性矛盾.

因此, 只要建立起 (″) 就证明了 G 不是反例. 注意到

$$O_p(M_1) \leqslant C_{M_2}(O_{p'}(F(M_2))) \text{ 且 } O_q(M_1) \leqslant C_{M_2}(O_{q'}(F(M_2))).$$

这蕴含了 $X := [M_2, O_p(M_1)] \leqslant C_{M_2}(O_{p'}(F(M_2)))$, 从而

$$[X, O_q(M_1)] \leqslant C_{M_2}(O_{p'}(F(M_2))) \cap C_{M_2}(O_{q'}(F(M_2))) = Z(F(M_2)) \leqslant M_1 \cap M_2 \leqslant M_1.$$

由此得到

$$[X, O_q(M_1), O_p(M_1)] \leqslant O_p(M_1) \cap F(M_2) \leqslant O_p(M_2).$$

于是由于 $[O_p(M_1), O_q(M_1), X] = 1$, 从而由三子群引理得到

$$[Y_2, O_q(M_1)] \leqslant [X, O_p(M_1), O_q(M_1)] \leqslant O_p(M_2),$$

这证明了

$$Y_2 \leqslant N_{M_2}(O_q(M_1)O_p(M_2)) = N_{M_2}(O_q(M_1) \times O_p(M_2)).$$

因此 $Y_2 \leqslant N_{M_2}(O_q(M_1)) = M_1 \cap M_2$, 由对称的证明也有 $Y_1 \leqslant M_1 \cap M_2$. 这就是 (″). □

下面研究 G 的特征为 p 的本原对 (M_1, M_2). 设

$$B := O_p(M_1)O_p(M_2) \ (\trianglelefteq M_1 \cap M_2).$$

对 $i=1,2$, 设 S_i 是 M_i 的包含 B 的 Sylow p 子群. 进一步设

$$Z_i := \Omega(Z(S_i)), \quad V_i := \langle Z_i^{M_i} \rangle, \quad W_i := \langle V_j^{M_i} \rangle.$$

注意到 $V_i \leqslant \Omega(Z(O_p(M_i)))$ 及

(+) $O_p(M_i/C_{M_i}(V_i)) = 1$

(见 179 页 9.2.7), 且如果 $M_i/C_{M_i}(V_i)$ 的任何非平凡子群二次作用在 V_i 上那么 M_i 在 V_i 上非 p 稳定. 对 (M_1, M_2) 的研究可分为 3 种情形:

(I) 对某个 $i \in \{1,2\}$ 且 $i \neq j$ 有 $V_i \not\leqslant O_p(M_j)$.

(II) $V_1V_2 \leqslant O_p(M_1) \cap O_p(M_2)$, 且对某个 $i \in \{1,2\}$, W_i 是非交换群.

(III) W_1 和 W_2 是交换群.

10.1.5　设 (M_1, M_2) 是 G 的特征为 p 的本原对. 那么存在 $i \in \{1,2\}$ 使下面之一成立:

(a) M_i 在 V_i 或 $O_p(M_i)/\Phi(O_p(M_i))$ 上的作用不是 p 稳定的.

(b) W_i 是初等交换群, 且 M_i 在 W_i 上的作用不是 p 稳定的.

证明　分别处理 3 种情况 (I), (II) 和 (III).

情形 (I). 选取符号使 $V_1 \not\leqslant O_p(M_2)$. 因为 V_1 在 B 中是正规的, 所以有

$$[O_p(M_2), V_1, V_1] \leqslant [V_1, V_1] = 1.$$

因此 V_1 二次作用在初等交换 p 群

$$W := O_p(M_2)/\Phi(O_p(M_2))$$

上, 并且由 142 页 8.2.9 有 $C_{M_2}(W) = O_p(M_2)$ 从而

$$O_p(M_2/C_{M_2}(W)) = 1.$$

因为 $V_1 \not\leqslant O_p(M_2)$ 所以这表明了 M_2 在 W 上的作用不是 p 稳定的.

情形 (II). 选取符号使 W_2 非交换群. 那么存在 $x \in M_2$ 使

$$[V_1, V_1{}^x] \neq 1 \text{ 且 } V_1{}^x \leqslant M_1.$$

第 2 个性质成立是因为 $V_1{}^x \leqslant O_p(M_2) \leqslant M_1$. 因为 A_1 正规于 $O_p(M_2)$ 从而也有 $V_1{}^x$ 正规于 $O_p(M_2)$, 于是得

$$[V_1, V_1{}^x, V_1{}^x] \leqslant [V_1{}^x, V_1{}^x] = 1.$$

因此 $V_1{}^x$ 非平凡且二次作用在 V_1 上. 于是 (+) 表明 M_1 在 V_1 上的作用非 p 稳定.

情形 (III). 在这种情况下要用到 Thompson 子群 $J(B)$. 如果 $J(B) \leqslant O_p(M_1) \cap O_p(M_2)$, 那么

$$J(B) = J(O_p(M_i)) \trianglelefteq M_i, \quad i = 1, 2,$$

这和 (M_1, M_2) 的本原性矛盾. 选取符号使

$$J(B) \nleqslant O_p(M_2).$$

设

$$C_{M_2}(W_2) \leqslant D \trianglelefteq M_2 \text{ 且 } D/C_{M_2}(W_2) = O_p(M_2/C_{M_2}(W_2)).$$

(M_1, M_2) 的本原性表明 $C_{M_2}(W_2) \leqslant C_{M_2}(V_1) \leqslant M_1$, 从而 $J(B) \trianglelefteq BC_{M_2}(W_2)$. 由此得到

$$J(B) \cap C_{M_2}(W_2) \leqslant O_p(C_{M_2}(W_2)) \leqslant O_p(M_2),$$

所以 $[W_2, J(B)] \neq 1$. 由 9.2.10 得到存在 $A \in \mathcal{A}(B)$ 使

(′) $[W_2, A] \neq 1 = [W_2, A, A]$.

现在假定 M_2 在 V_2 上的作用是 p 稳定的. 那么 $A \leqslant B \cap D$ 且

$$B \cap D \trianglelefteq (B \cap D)C_{M_2}(W_2) \trianglelefteq \trianglelefteq D \trianglelefteq M_2,$$

所以 $A \leqslant B \cap D \leqslant O_p(M_2)$. 因为 $[W_2, A] \neq 1$ 存在 $x \in M_2$ 使 $[V_1{}^x, A] \neq 1$. 于是

$$A \leqslant O_p(M_2) \leqslant M_1{}^x$$

且 (′) 蕴含 A 非平凡且二次作用在 $V_1{}^x$ 上. 因此 (+) 表明了 $M_1{}^x$ 在 $V_1{}^x$ 上的作用是 p 稳定的从而 M_1 在 V_1 上的作用也是 p 稳定的. □

10.1.6 定理 设 (M_1, M_2) 是 G 的特征为 p 的本原对. 那么 M_1 或 M_2 有非交换的 Sylow 2 子群. 特别地, 奇阶群无特征为 p 的本原对.

证明 当 $p \neq 2$ 时, 从 10.1.5 和 9.4.5 得到. 设 $p = 2$, 假定 M_1 和 M_2 的 Sylow 2 子群是交换群. 那么 $O_2(M_1) = O_2(M_2)$ 且 (M_1, M_2) 是非本原的. □

应该指出的是 10.1.6 在 10.2 节 $p^a q^b$ 定理的证明中是必需的, 但是下面的结果没有一个是用在那里的.

当 $p = 2$ 时每一个对合都二次作用 (见 9.1 节), 所以没有给出关于 M_1 和 M_2 的结构的任何信息. 在这种情况下不得不考虑二次作用的“特性”来得到更进一步的信息.

对特征为 2 的本原对的研究, 首先需要证明 4 个引理.

10.1.7 设 M 是 p 可分群, A 是 M 的一个 p 子群且满足

$$\Phi(A) \leqslant O_p(M), \quad A \nleqslant O_p(M).$$

那么存在 $x \in O_{pp'}(M)$ 使对 $L := \langle A, A^x \rangle$ 有

(a) $x \in O^p(L) \leqslant O_{pp'}(M)$.

(b) $[O^p(L), A] = O^p(L)$.

(c) $|A/A \cap O_p(L)| = p$ 且 $[A \cap O_p(L), L] \leqslant O_p(M)$.

证明　根据 6.4.11, 存在具有性质 (a) 且不是 p 群的子群 L. 选取 L 使它在所有这样的子群中是极小的. 那么得到 (b). 设

$$\overline{L} := L/O_p(L) \text{ 和 } \overline{Q} := O_{p'}(\overline{L}),$$

则 $\overline{L} = \overline{AQ}$, 并且因 $\Phi(A) \leqslant O_p(M) \cap L \leqslant O_p(L)$ 从而 $\overline{A}$ 是初等交换 p 群. 设 $\mathcal{B}$ 是 A 的极大子群的集合. 由 8.3.4 得到

$$\overline{Q} = \langle C_{\overline{Q}}(\overline{U}) | U \in \mathcal{B} \rangle,$$

于是因 A 非平凡作用在 $\overline{Q}$ 上而有对某个 $U \in \mathcal{B}$ 有 $[C_{\overline{Q}}(\overline{U}), A] \neq 1$. 由 L 的极小选择得到 $C_{\overline{Q}}(\overline{U}) = \overline{Q}$. 这蕴含 $U = A \cap O_p(L)$ 从而

$$[U, O^p(L)] \leqslant O_p(L) \cap O_{pp'}(M) \leqslant O_p(M),$$

于是得到 (c). □

10.1.8　设 M 是特征为 2 的群, 且有和 S_3 同构的截断. 那么 M 就有同构于 S_4 的截断.

证明　设 M 是极小反例. 因为 $O_2(S_3) = 1$, 所以 $M/O_2(M)$ 也有同构于 S_3 的截断. 设

$$O_2(M) \leqslant N \trianglelefteq X \leqslant M \text{ 使 } X/N \cong S_3.$$

由 M 的极小选择得到 $X = M$(见 10.1.1). 设

$$\overline{M} := M/N\ (\cong S_3)$$

且 $D \in \mathrm{Syl}_3 M$. 那么 $\overline{D}$ ($\cong C_3$) 是 $\overline{M}$ 的被 $\overline{M}$ 的每一个对合逆转的正规子群. 由 Frattini 论断得到 $M = N_M(D)N$. 因此, 存在非平凡地作用在 3 群 D 上的 2 元. 设 $t \in N_M(D)$ 是这样的一个 2 元. 进而选取 t 使 t 的阶关于这个性质是极小的. 那么 t 作为对合作用在 D 上. 于是由 8.1.8 得到有 $d \in D$ 使

$$o(d) = 3 \text{ 且 } d^t = d^{-1},$$

所以有 $\langle d, t \rangle / \langle t^2 \rangle \cong S_3$. M 的极小性表明

$$M = O_2(M)\langle d, t \rangle, \quad t^2 \in O_2(M),$$

且同 8.2.9 和 8.4.2 一起得到

$$\Phi(O_2(M)) = 1 \text{ 且 } C_{O_2(M)}(d) = 1.$$

这蕴含了 $t^2 = 1$. 由 8.1.4, 存在 $1 \neq z \in C_{O_2(M)}(t)$. 设 $V := \langle z, z^d, z^{d^2} \rangle$. 那么 $|V| \leqslant 8$ 且 V 正规于 M. 情形 $|V| = 8$ 和 $C_V(d) = 1$ 矛盾. 因此 $V \cong C_2 \times C_2$ 且 $V\langle d, t\rangle \cong S_4$, 所以 M 不是反例. □

10.1.9 设群 M 忠实地作用在初等交换 2 群 V 上, A 是 M 的初等交换 2 子群. 假设 $C_M(O_{2'}(M)) \leqslant O_{2'}(M)$ 且

(*) $|V/C_V(A)| < |A|^2$.

那么 M 有同构于 S_3 的截断.

证明 在所有满足 (*) 的初等交换 2 子群中, 选取 A 使 $|A|$ 极小.

首先假定 $|A| = 2$. 那么 (*) 蕴含 $A \in \mathcal{A}_V(M)$, 从 9.3.7 得到结论.

现在假设 $|A| > 2$. 假设 $C_M(O_{2'}(M)) \leqslant O_{2'}(M)$ 表明了 A 非平凡地作用在 $O_{2'}(M)$ 上. 设 Q 是 $O_{2'}(M)$ 的最小的使 $Q^A = Q$ 且 $[Q, A] \neq 1$ 的子群. 从 8.5.2 得到

$$A_0 := C_A(Q)$$

是 A 的极大子群, QA/A_0 忠实地作用在 $C_V(A_0)$ 上. 把已经处理过的情形 $|A| = 2$ 运用到群对 $(C_V(A_0), QA/A_0)$ 上得到结论, 如果有

$$|C_V(A_0)/C_V(A)| < |A/A_0|^2 = 4.$$

能够从 A 的极小性得到这个条件是因为

$$|V/C_V(A)| < |A|^2 = 4|A_0|^2 \leqslant 4|V/C_V(A_0)|. \quad □$$

为证明下面的引理还需要一些符号. 设 X 是作用在初等交换 p 群 Z 上的群.

$\mathcal{Q}(Z, X) := \{A \leqslant X \mid [Z, A, A] = 1 \neq [Z, A]\}$.

如果 $\mathcal{Q}(Z, X) = \varnothing$, 设 $q(Z, X) := 0$, 否则设

$q(Z, X) := \min\{e \in \mathbb{R} \mid |A/C_A(Z)|^e = |Z/C_Z(A)|,\ A \in \mathcal{Q}(Z, X)\}$.

10.1.10 设 M 是群, V 是 M 的初等交换正规 p 子群, 且设 $Z \leqslant V$ 使

$$V = \langle Z^M \rangle \text{ 和 } Z \trianglelefteq O_p(M).$$

假设存在 $A \leqslant O_p(M)$ 使 $[V, A, A] = 1$. 那么

$$|A/C_A(V)|^q \leqslant |V/C_V(A)|,$$

其中, $q := q(Z, O_p(M))$.

证明 设 $Z^M = \{Z_1, \cdots, Z_k\}$. 那么 Z_i, $i = 1, \cdots, k$ 在 $O_p(M)$ 中正规. 定义列

$$A := A_0 \geqslant \cdots \geqslant A_{i-1} \geqslant A_i \geqslant \cdots \geqslant A_k,$$

令

$$A_i := C_{A_{i-1}}(Z_i), \quad i = 1, \cdots, k.$$

那么

$$A_k = C_A(V)$$

且由 A 在 V 上的二次作用得到

$$[Z_i, A_{i-1}, A_{i-1}] = 1, \quad i = 1, \cdots, k.$$

如果 $[Z_i, A_{i-1}] = 1$, 那么 $A_{i-1} = A_i$; 如果 $[Z_i, A_{i-1}] \neq 1$, 那么 q 的定义蕴含

$$|A_{i-1}/A_i|^q \leqslant |Z_i/C_{Z_i}(A_{i-1})| = |Z_iC_V(A_{i-1})/C_V(A_{i-1})| \leqslant |C_V(A_i)/C_V(A_{i-1})|.$$

由此得到

$$|A/C_A(V)|^q = \prod_{i=1}^{k} |A_{i-1}/A_i|^q \leqslant \prod_{i=1}^{k} |C_V(A_i)/C_V(A_{i-1})| = |V/C_V(A)|. \qquad \Box$$

在完成这些准备后现在能够研究特征为 2 的本原对. 证明

10.1.11 定理 设 (M_1, M_2) 是 G 的特征为 2 的可解本原对. 那么 M_1 或 M_2 有同构于 S_4 的截断.

证明 如同在 10.1.5 的证明中那样, 分别处理给出的 3 种情形 (I) ~ (III). 符号的选择和那里相同. 由于 10.1.8, 10.1.9 和 10.1.4 中 Bender 定理后的 (+), 假定对 $i \in \{1, 2\}$, 有

(×) 对 B 的所有使 $\Phi(A) \leqslant C_B(V_i)$ 的子群 A 有 $|A/C_A(V_i)|^2 \leqslant |V_i/C_{V_i}(A)|$.

情形 (I). 不失一般性, 可假定 $V_1 \not\leqslant O_2(M_2)$. 应用 10.1.7, 用 V_1 和 M_2 代替 A 和 M. 那么存在子群 $L \leqslant M$ 和 $x \in O_{22'}(M_2) \cap L$ 使

$$L = \langle V_1, V_1{}^x \rangle, \ [V_1 \cap O_p(L), L] \leqslant O_p(M_2)$$

且

(1) $|V_1 : V_1 \cap O_2(L)| = 2$.

设

$$W := (V_1 \cap O_2(L))(V_1{}^x \cap O_2(L))$$

且

$$W_0 := V_1 \cap V_1{}^x \ (\leqslant W).$$

显然 $W_0 \leqslant Z(L)$, 从而因 $x \in L$ 有

(2) $W_0 = Z(L) \cap W = C_{V_1{}^x \cap O_2(L)}(V_1) = C_{V_1 \cap O_2(L)}(V_1{}^x)$,

并且因 V_1 正规于 $O_2(M_2)V_1$ 有

$$[W, V_1] \leqslant V_1 \cap O_2(L) \leqslant W,$$

类似地, 有 $[W, V_1{}^x] \leqslant W$, 从而

$$W \trianglelefteq L.$$

于是 $[O_2(M_2), V_1] \leqslant V_1 \cap O_2(L) \leqslant W$ 和 $[O_2(M_2), V_1{}^x] \leqslant W$ 蕴含 $[O_2(M_2), L] \leqslant W$. $O^2(L)$ 在 $O_2(M_2)$ 上的非平凡作用给出 L 在 W 上从而也在 W/W_0 上的非平凡作用 (见 8.2.2). 现在考虑

$$A := V_1{}^x \cap O_2(L)$$

在 V_1 上的作用. 因为

$$|A/C_A(V_1)| \overset{(2)}{=} |A/W_0| \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}|V_1/W_0| \overset{(2)}{\geqslant} \frac{1}{2}|V_1/C_{V_1}(A)|,$$

所以得到

$$|A/C_A(V_1)|^2 > |V_1/C_{V_1}(A)| \text{ 或 } |A/W_0| = 2.$$

第 1 种情形和 $(\times)$ 矛盾. 在第 2 种情形有 $|W/W_0| = 4$. 因为 $O^2(L)$ 非平凡地作用在 W/W_0 上, 所以有结论

$$L/C_L(W/W_0) \cong \mathrm{SL}_2(2) \cong S_3.$$

于是 10.1.8 证明了 M_2 有同构于 S_4 的截断.

情形 (II). 用和 10.1.5 的证明中类似的方法来证明. 同那里一样, 假定 W_2 是非交换群. 那么存在 $x \in M_2$ 使

$$[V_1, V_1{}^x] \neq 1 \text{ 且 } V_1{}^x \leqslant O_2(M_2) \leqslant M_1 \cap M_1{}^x.$$

由 (V_1, M_1) 和 $(V_1{}^x, M_1{}^x)$ 之间的对称性 —— 也许要交换符号 —— 可假设

$$|V_1/C_{V_1}(V_1{}^x)| \leqslant |V_1{}^x/C_{V_1{}^x}(V_1)|.$$

但是取 $A = V_1^x$ 和 $V_i = V_1$ 知这和条件 $(\times)$ 矛盾.

情形 (III). 如同 10.1.5 的证明中那样运用 Thompson 子群 $J(B)$, 且可假定 $J(B) \not\leqslant O_2(M_2)$. 那么存在 $A \in \mathcal{A}(B)$ 使

$$[W_2, A] \neq 1 = [W_2, A, A].$$

由 179 页 9.2.9 有 $A \in \mathcal{A}_{V_1}(M_1)$ 且

$$|A/C_A(V_1)| \geqslant |V_1/C_{V_1}(A)|$$

(这是 180 页 9.2 节中的 $\mathcal{Q}'_1$). 于是 $(\times)$ 蕴含

(3) $[V_1, A] = 1$.

假设 $A \leqslant O_2(M_2)$. 因为 $[W_2, A] \neq 1$ 所以存在 $x \in M_2$ 使 $[{V_1}^x, A] \neq 1$. 注意到

$$A \leqslant O_2(M_2) = O_2(M_2)^x \leqslant {M_1}^x.$$

从而有 $[V_1, A^{x^{-1}}] \neq 1$ 且 $A^{x^{-1}} \leqslant B$. 于是由 $A^{x^{-1}} \in \mathcal{A}_{V_1}(B)$ 和 $\mathcal{A}_{V_1}(B)$ 的定义证明了

$$|A^{x^{-1}}/C_{A^{x^{-1}}}(V_1)| \geqslant |V_1/C_{V_1}(A^{x^{-1}})|,$$

这和 $(\times)$ 矛盾.

现在假定 $A \not\leqslant O_2(M_2)$, 设 L 同 10.1.7 中所定义 (关于 A 和 $M = M_2$). 那么

$$A_0 := A \cap O_2(L)$$

是 A 的极大子群. 设

$$Q := O^2(L),\ U := \langle {V_1}^L \rangle \text{ 和 } \overline{U} := U/C_U(Q).$$

如果 $\overline{U} = 1$, 那么 $Q \leqslant C_G(V_1) \cap M_2 \leqslant M_1 \cap M_2$; 从而因 $A \leqslant B \leqslant O_2(M_1 \cap M_2)$ 而有

$$Q = [Q, A] \leqslant O_2(M_1 \cap M_2),$$

但 Q 不是 2 群, 得到矛盾. 因此 $\overline{U} \neq 1$.

因为 $O_2(L) \leqslant A_0 O_2(M_2)$, 所以子群 V_1 被 $O_2(L)$ 正规化. 特别有 $O_2(L)U \leqslant B$. 运用 10.1.10, 以 (LU, V_1, U) 替代 (M, Z, V). 因为 $(\times)$ 蕴含 $q(V_1, O_2(LU)) \geqslant 2$, 所以得到

$$|A_0/C_{A_0}(U)|^2 \leqslant |U/C_U(A_0)|.$$

另一方面, 因为 $A \in \mathcal{A}(L)$ $(\subseteq \mathcal{A}_U(L))$ 而有

(+) $|U/C_U(A)| \leqslant |A/C_A(U)|$.

于是由 $|A/A_0| = 2$ 得到

$$|A/C_A(U)|^2 \leqslant 2^2|A_0/C_{A_0}(U)|^2 \leqslant 4|U/C_U(A_0)| \leqslant 4|U/C_U(A)| \leqslant 4|A/C_A(U)|,$$

所以 $|A/C_A(U)| \leqslant 4$, 由 (+) 得

(4) $A_0 = C_A(U)$ 且 $|U/C_U(A)| = 2$ 或

(5) $|A_0/C_{A_0}(U)| = 2$ 且 $|U/C_U(A)| = 4$.

在情形 (4) 时, 因为对某个 $x \in L$ 有 $L = \langle A, A^x \rangle$, 所以有 $|\overline{U}| = 4$. 因此 $L/C_L(\overline{U}) \cong S_3$, 从而由 10.1.8 证明 M_2 有同构于对称群 S_4 的截断.

于是, 现在可假定在情形 (5) 下. 设 $C_U(Q) < W \leqslant U$ 使 L 不可约地作用在 $\overline{W}$ 上. 首先假设 $|U/WC_U(A)| \neq 1$, 那么有 $|W/C_W(A)| \leqslant 2$, 和情形 (4) 中同样的方法 (以 W 替换 U) 可证明 $|\overline{W}| = 4$ 且 $L/C_L(\overline{W}) \cong S_3$. 因此 M_2 有同构于 S_4 的截断.

现在假设 $U = WC_U(A)$, 则有 $[U, Q] \leqslant W$. 因 $L = AQ$, ${V_1}^A = V_1$ 和 $U = \langle {V_1}^L \rangle$, 由此得到

(6) $\overline{U} = \overline{W}\,\overline{V}_1$.

注意到 $O_2(L)$ 平凡地作用在 L 主因子 $\overline{W}$ 上, 从而 A_0 也平凡地作用在 L 主因子 $\overline{W}$ 上. 因此 (3) 和 (6) 蕴含 $[\overline{U}, A_0] = 1$. 设

$$P := [\langle {A_0}^L \rangle, Q] \ (\leqslant O_2(L)).$$

因为 $\langle {A_0}^L \rangle$ 也平凡地作用在 $\overline{U}$ 上, 所以有 $[U, P] \leqslant C_U(Q)$, 因此

$$[U, P, P] = 1.$$

如果 $[U, P] = 1$, 那么 PA_0 中心化 V_1. 另一方面 PA_0 正规于 $L\ (= QA)$, 所以 PA_0 也中心化 $\langle {V_1}^L \rangle$, 这和在情形 (5) 时有 $|A_0/C_{A_0}(U)| = 2$ 矛盾. 于是有

(7) $[U, P] \neq 1$.

因为 P 二次作用在 $V_1\ (\leqslant U)$ 上且正规于 L, 所以得到 $[U, \Phi(P)] = 1$. 因此以 P 替代 A, $(\times)$ 也成立. 于是同前面那样, 由 10.1.10 得到

$$|P/C_P(U)|^2 \leqslant |U/C_U(P)| \overset{(5)}{\leqslant} 4^2.$$

由此得到 $|P/C_P(U)| \leqslant 4$. 如果 Q 平凡地作用在 $P/C_P(U)$ 上, 那么 Q 也平凡地作用在 $\langle {A_0}^L \rangle / C_P(U)$ 上 (见 8.2.2). 但这时有 $P = C_P(U)$, 和 (7) 矛盾. 于是有 $P/C_P(U) \cong C_2 \times C_2$ 且

$$L/C_L(P/C_P(U)) \cong S_3,$$

再次由 10.1.8 得到 M_2 有同构于 S_4 的截断. □

以 10.1.3 和 10.1.11 的结合所得到的一个结果来结束本节:

10.1.12 定理 设 G 是偶数阶的群且 $O_2(G) = 1$. 假设对 G 的每一个 2 局部子群 M 有

(1) M 的特征为 2 且可解.

(2) M 没有同构于 S_4 的截断.

那么 G 的每一个极大 2 局部子群在 G 中都是强 2 嵌入的. □

10.2　p^aq^b 定理

本节证明

10.2.1　Burnside 定理　每一个 p^aq^b $(p, q \in \mathbb{P})$ 阶的群都是可解的.

对 Burnside 的这个定理有一个简短的群表示论证明①. 他的结果和 Frobenius 的关于 Frobenius 群的核的结果 (见 64 页 4.1.6) 都把特征标理论作为研究有限群的工具. 过了 60 年, Bender[30], Goldschmidt[54] 以及 Matsuyama[80] 才给出关于 Burnside 结果的独立于特征标理论的较长的证明.

在不用特征标理论去证明 Burnside 定理的尝试中, 不可避免地要用到在前面的章节中遇到的概念和符号:

- 本原极大子群,
- p 局部子群的 Fitting 子群,
- 互素和 p 稳定作用.

并且一个更为深刻的将是第 11 章中心的概念可能被用到:

- 一个群的被一个给定的 q' 子群正规化的非平凡 q 子群的集合.

在 20 世纪 60 年代所有这些概念 (和它们的推广) 都因为 Thompson, Gorenstein, Glauberman 和 Bender 的工作而受到密切关注. 它们的影响对过去 40 年有限群研究发展进程具有很大的作用.

如果 Burnside 没有发现这个优美的特征标理论证明, 而是他和他同时代的人研究了这种情况下的更广泛的群论结构, 那么就不知道群论将会是怎么发展的.

从 Burnside 定理的证明开始. 设 G 是极小阶反例.

对 $U \leqslant G$, 以 U_p 和 U_q 分别表示 U 的一个 Sylow p 子群和 Sylow q 子群.

由 5 页 1.1.6, 有分解

$$G = G_pG_q.$$

G 的极小性蕴含 G 的每一个真子群和商群 $G/N, 1 \neq N \trianglelefteq G$, 是可解的. 因为 G(作为反例) 非可解, 从 6.1.2 得到 G 是非交换单群. 特别有

$$1 \neq U < G \Rightarrow N_G(U) \text{ 可解}.$$

下面分析 G 的局部结构. 必需的工具是 8.2.12:

(1) 设 M 是 G 的极大子群且 P 是 M 的一个 p 子群. 那么 $O_q(C_M(P)) \leqslant O_q(M)$.

---

① 见文献 [4] 的 321 页或后面的文献, 如文献 [9].

设 $\mathcal{M}$ 是 G 的极大子群的集合且

$$\mathcal{M}_p := \{M \in \mathcal{M} | M\text{的特征为}p\},$$
$$\mathcal{M}_q := \{M \in \mathcal{M} | M\text{的特征为}q\},$$
$$\mathcal{M}_0 := \mathcal{M} \backslash (\mathcal{M}_p \cup \mathcal{M}_q).$$

注意到

$$F(M) = O_p(M) \times O_q(M) \quad (M \in \mathcal{M}),$$

所以有

$$M \in \mathcal{M}_p \Leftrightarrow F(M) = O_p(M) \text{ 和}$$
$$M \in \mathcal{M}_q \Leftrightarrow F(M) = O_q(M).$$

(2) 设 $M \in \mathcal{M}$ 且 $G_p \leqslant M$. 那么 $M \in \mathcal{M}_p$.

证明 设 $Q := O_q(M) \leqslant G_q$. 那么

$$\langle Q^G \rangle = \langle Q^{G_pG_q} \rangle = \langle Q^{G_q} \rangle \leqslant G_q.$$

于是 $\langle Q^G \rangle$ 是 G 的真正规子群, 从而 G 的单性蕴含 $Q = 1$. □

(3) 设 $M \in \mathcal{M}_0$. 那么 M 是 G 的包含 $Z(F(M))$ 的唯一极大子群. 特别地, 对所有的 $a \in Z(F(M))^\#$ 有 $C_G(a) \leqslant M$.

证明 设 $A := Z(F(M))$. 因为 $M \in \mathcal{M}_0$ 得到

$$A = A_p \times A_q, \quad A_p \neq 1 \neq A_q.$$

并且 M 的极大性给出 $M = N_G(A_p) = N_G(A_q)$ 从而

$$A_q \leqslant O_q(C_M(A_p)) = O_q(C_G(A_p)).$$

设 $A \leqslant H \in \mathcal{M}$. 那么也有 $A_q \leqslant O_q(C_H(A_p))$, 从而 (1) 蕴含 $1 \neq A_q \leqslant O_q(H)$. 类似地 (交换 p 和 q) 有 $1 \neq A_p \leqslant O_p(H)$. 因此 $H \in \mathcal{M}_0$ 且有

$$O_q(H) \leqslant C_G(A_p) \leqslant M \text{ 和 } O_p(H) \leqslant C_G(A_q) \leqslant M,$$

所以 $F(H) \leqslant M$. 交换 H 和 M 的角色, 得到 $F(M) \leqslant H$.

有 $H = M$ 或 (M, H) 是本原对. 在第 2 种情形下, 10.1.4 表明了 $M \in \mathcal{M}_p$ 或 $M \in \mathcal{M}_q$, 和 $M \in \mathcal{M}_0$ 矛盾. □

(4) 设 $M \in \mathcal{M}_0$. 那么存在 $x \in G \backslash M$ 和 $M_p \in \mathrm{Syl}_p\, M$, 使

$$M_p = M_p{}^x \ (\leqslant M \cap M^x).$$

证明 选取 G_p 使 $M_p := G_p \cap M \in \mathrm{Syl}_p\, M$. 由 (2) 得 $M_p < G_p$, 所以由 48 页 3.1.10 得到存在

$$x \in G_p \backslash M_p \subseteq G \backslash M,$$

使 $M_p{}^x = M_p$. □

(5) $\mathcal{M}_0 = \varnothing$.

证明 假设 $\mathcal{M}_0 \neq \varnothing$ 且 $M \in \mathcal{M}_0$. 选取符号使 $p > q$. 同 (3) 的证明中那样, 设

$$A_p := Z(O_p(M)) \text{ 和 } A_q := Z(O_q(M)),$$

另外还设 $x \in G \backslash M$ 同 (4) 中所选择. 那么

$$A_p A_p{}^x \leqslant M \cap M^x.$$

首先假定 A_q 循环从而 $A_q{}^x$ 也循环. 因为 $p > q$ 所以 A_p 在 $A_q{}^x$ ($\trianglelefteq M^x$) 上的作用是平凡的 (见 40 页 2.2.5). 于是 (3) 蕴含 $A_q{}^x \leqslant M$, 所以 $Z(F(M^x)) \leqslant M$. 于是再次由 (3) 得 $M = M^x$, 这和 $N_G(M) = M$ 且 $x \notin M$ 矛盾.

已证明了 A_q 非循环. 由 (4) 存在 Sylow 子群 M_q 和元素 $y \in G \backslash M$ 使

$$A_q A_q{}^y \leqslant M_q = M_q{}^y \leqslant M \cap M^y.$$

因此 $A_q \leqslant M^y$, 从而 A_q 作用在 $P := A_p{}^y$ ($\trianglelefteq M^y$) 上. 于是 8.3.4 蕴含

$$P = \langle C_P(a) | a \in A_q{}^\# \rangle \overset{(3)}{\leqslant} M,$$

所以有 $Z(F(M^y)) = A_p{}^y A_q{}^y \leqslant M$. 同上面一样, 由 (3) 得到矛盾 $M = M^y$. □

(6) 设 $M \in \mathcal{M}$ 使 $Z(G_q) \cap M \neq 1$, 那么 $M \in \mathcal{M}_q$.

证明 假设 M 是反例. 由 (5) 得 $M \in \mathcal{M}_p$, 从而

$$C_M(O_p(M)) \leqslant O_p(M) =: P.$$

设 $P \leqslant G_p$. M 的极大性产生

$$Z := Z(G_p) \leqslant N_G(P) \leqslant M,$$

所以有 $Z \leqslant P$. 设 $Y := Z(G_q) \cap M$. 那么 $\langle Z^Y \rangle$ ($\leqslant P$) 是 p 群. 对 $g \in G$, 存在 $x \in G_p$, $y \in G_q$ 使 $g = xy$. 因此

$$Z^{gY} = Z^{yY} = Z^{Yy},$$

所以 $\langle Z^{gY}\rangle = \langle Z^Y\rangle^g$, $\langle Z^{gY}\rangle$ 是 p 群. 由 Matsuyama 引理 (见 123 页 6.7.8), 存在 $T \in \mathrm{Syl}_p\, G$ 使

$$R := \mathrm{wcl}_G(Z, T)$$

被 Y 正规化. 由此得到 $\langle Y, T\rangle \leqslant N_G(R) < G$, 从而 $\langle Y^T\rangle$ 是 G 的真子群. 另一方面有 $G = G_pT$ 从而 $Y^G = Y^T$, 所以 $\langle Y^T\rangle$ 是 G 的正规子群. 这和 G 的单性矛盾. □

(7) 设 L 是 G 的 p 局部子群.

(a) 对所有的 $G_q \in \mathrm{Syl}_q\, G$ 有 $L \cap Z(G_q) = 1$.

(b) L 具有特征 p.

证明 设 $1 \neq R \leqslant G_p$ 且 $M \in \mathcal{M}$ 使 $L = N_G(R)$ 且 $L \leqslant M$. 特别地, $Z(G_p) \leqslant L \leqslant M$.

(a) 假设 $L \cap Z(G_q) \neq 1$. 那么 $M \cap Z(G_q) \neq 1 \neq M \cap Z(G_p)$, 这和 (6) 矛盾.

(b) 假设 $Q := O_q(L) \neq 1$. 那么 $N_G(Q)$ 是 G 的包含 L 的一个 q 局部子群, 从而也包含 $Z(G_p)$. 这和 (a) 矛盾 (倒换 p 和 q 的角色). □

(8) $|G|$ 是奇数.

证明 在反例中, 设 $q = 2$ 且 t 是 $Z(G_2)$ 中的对合 (见 49 页 3.1.11). Baer 定理 (见 122 页 6.7.6) 证明了 G 中存在 p 元 $y \neq 1$ 使 $y^t = y^{-1}$. 因此 $L = N_G(\langle y\rangle)$ 是 G 的包含 t 的 p 局部子群. 但这和 (7 a) 矛盾. □

于是 10.1.6 和 (8) 蕴含 G 没有特征为 p 的本原对. 但因为 (7) 的 (b), G 也满足 10.1.3 的假设. 因此对 G 的每一个极大 p 局部子群 M 有

$$|M \cap M^g|_p = 1, \quad \forall g \in G \backslash M.$$

因为可选择 M 包含 G_p, 所以对 $g \in G\backslash M$ 有 $G_p \cap {G_p}^g = 1$, 因此 (见 5 页 1.1.6)

$$|G_p|^2 = |G_p {G_p}^g| \leqslant |G|.$$

由对称的证明也有 $|G_q|^2 \leqslant |G|$. 但因为 $|G_p| \neq |G_q|$ 得到这和 $|G| = |G_p||G_q|$ 矛盾. □

10.3 融合方法

本节给出一个特别适合研究特征为 p 的本原对 (M_1, M_2) 的方法. 这个方法是 Goldschmidt[58] 在 20 世纪 70 年代末提出的, 从那时起这个方法就和有限群局部理论组成一个有机整体①. **融合方法**(amalgam method) 是指这个方法不是要求在有

① 见文献 [7].

限群中而是可以在有限群 M_1 和 M_2 的融合积 (amalgamated product) 中进行. 在内容里没有用到融合积.

设 G 是群, P_1 和 P_2 是 G 的两个不同的子群. 本节并不假定 G 是有限群, 只假定 P_1 和 P_2 是 G 的有限子群.

设 Γ 是 P_1 和 P_2 在 G 中的右陪集的集合. Γ 的元素叫做**顶点**(vertices). 对 $\{1,2\}=\{i,j\}$, 如果顶点 $P_ix, P_jy \in \Gamma$ 满足

$$P_ix \cap P_jy \neq \varnothing \text{ 且 } P_ix \neq P_jy.$$

那么称 P_ix 和 P_jy 是**相邻的**(adjacent), 此时 $\{P_ix, P_jy\}$ 叫做 Γ 的**边**(edge). 那么 Γ 是一个**图**(graph), 即是 G 的关于 P_1 和 P_2 的**陪集图**(coset graph).

注意如果 $\{P_ix, P_jy\}$ 是一个边则 $i \neq j$, 那么因 $1 \in P_1 \cap P_2$ 而有 $\{P_1, P_2\}$ 是一条边.

对 $\alpha \in \Gamma$, 设 $\Delta(\alpha)$ 是所有和 α 相邻的顶点的集合.

群由右乘

$$g: \Gamma \to \Gamma \text{ 使 } P_ix \mapsto P_ixg \ (g \in G)$$

作用在 Γ 上.

同平常一样, 记 α^g 为 α 在 g 下的像, 把 α^g 叫做和 α 共轭的顶点. 因为

$$P_ix \cap P_jy \neq \varnothing \Leftrightarrow P_ixg \cap P_jxg \neq \varnothing,$$

所以 g 作为图 Γ 的自同构进行作用, 且由这个作用得出 G 到 Γ 的自同构群 $\mathrm{Aut}\,\Gamma$ 中的同态.

首先给出这个作用的基本性质.

10.3.1　(a) G 在 Γ 的顶点上有两个轨道, P_1 和 P_2 是这两个轨道的代表. 每一个顶点 $\alpha \in \Gamma$ 的稳定子 G_α 是 P_1 或 P_2 的一个 G 共轭.

(b) G 传递地作用在 Γ 的边上. G 中的每一个边稳定子是 $P_1 \cap P_2$ 的 G 共轭.

(c) G_α 传递地作用在 $\Delta(\alpha)$ 上, $\alpha \in \Gamma$. 特别地,

$$\text{对} \beta \in \Delta(\alpha) \text{有} |\Delta(\alpha)| = |G_\alpha : G_\alpha \cap G_\beta|.$$

(d) $(P_1 \cap P_2)_G$ 是 G 在 Γ 上作用的核①.

证明　(a) 注意到对 $P_ix \in \Gamma$ 和 $g \in G$ 有

$$P_ixg = P_ix \Leftrightarrow P_ig^{x^{-1}} = P_i \Leftrightarrow g \in P_i^x.$$

(b) 设 $\{P_1x, P_2y\}$ 是边, 所以存在 $z \in P_1x \cap P_2y$. 因此有

$$P_1x = P_1z, \quad P_2y = P_2z,$$

① $(P_1 \cap P_2)_G$ 是含在 $P_1 \cap P_2$ 中的 G 的最大的正规子群.

元素 x^{-1} 把边 $\{P_1x, P_2y\}$ 共轭到 $\{P_1, P_2\}$. 根据 (a), $\{P_1z, P_2z\}$ 的稳定子是 $P_1{}^z \cap P_2{}^z = (P_1 \cap P_2)^z$.

(c) 由 (a), 假定 $\alpha = P_1$. 那么

$$\Delta(\alpha) = \{P_2y | P_2y \cap P_1 \neq \varnothing\} = \{P_2y | y \in P_1\}.$$

于是 P_1 在 $\Delta(\alpha)$ 上传递.

(d) 由 (a), G 的任何包含在 $P_1 \cap P_2$ 中的正规子群固定 Γ 的每一个顶点. □

如果

$$\text{对 } i = 0, \cdots, n-1 \text{ 有 } \alpha_i \in \Delta(\alpha_{i+1}) \text{ 且对 } i = 0, \cdots, n-2 \text{ 有 } \alpha_i \neq \alpha_{i+2},$$

那么顶点的 $(n+1)$ 元有序组 $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 叫做从 α_0 到 α_n 的**长**(length) 为 n 的**路**(path). 路可以用来定义顶点 $\alpha, \beta \in \Gamma$ 之间的**距离**(distance) $d(\alpha, \beta)$. 这里如果在 Γ 中没有从 α 到 β 的路那么定义 $d(\alpha, \beta) = \infty$, 否则 $d(\alpha, \beta)$ 是从 α 到 β 的最短的路长.

子集

$$\{\beta \in \Gamma | d(\alpha, \beta) < \infty\}$$

叫做 Γ 的包含 α 的**连通分支**(connected component).

连通分支的任何两个顶点都被一个路连接, 不同的连通分支不连接. 如果 Γ 只有一个连通分支那么 Γ 叫做**连通的**(connected).

初看, 并不能很清楚地看出来为什么这些新的东西和图论语言有助于简化对 G 的结构 (更确切的说是 P_1 和 P_2 的结构) 的研究. 这个现象的根本原因是图论的概念使我们能够用非常容易的方式来描述所研究的群论性质. 当然, 将来的证明将揭示这个原因, 但这里已能够指出其中两点:

• 下面结论 10.3.2 证明了 Γ 是连通的当且仅当 G 由 P_1 和 P_2 生成. 这把一个易把握的群论性质转化为可以在证明和定义中容易应用的初等图论性质, 如在 10.3.3 和一个临界偶的定义中.

• 通过上面定义的距离, 能够定义大量的顶点稳定子的正规子群. 例如, 对 $i \in \mathbb{N}$ 有

$$G_\alpha^{[i]} := \bigcap_{\substack{\delta \in \Gamma \\ d(\alpha,\delta) \leqslant i}} G_\delta.$$

在没有图 Γ 的帮助下, 对 $\alpha = P_1$(所以 $G_\alpha = P_1$) 请读者自己尝试定义这些正规子群.

当然, 因为 P_1 和 P_2 是有限的所以并非所有这些正规子群都是不同的. 事实上, 融合的一个核心思想是找出这些子群中哪些是相同的.

10.3.2　Γ 是连通的当且仅当 $G = \langle P_1, P_2 \rangle$.

证明　首先假设 $G = \langle P_1, P_2 \rangle$. 设 Δ 是包含 P_1 的连通分支. 因为 P_1 和 P_2 是邻接的, 所以 P_2 也在 Δ 中. 因为不同的连通分支不连接, 所以得到

$$\Delta = \Delta^{\langle P_1, P_2 \rangle} = \Delta^G,$$

从而由 10.3.1(a) 得 $\Delta = \Gamma$.

现在假设 Γ 是连通的且设 $G_0 := \langle P_1, P_2 \rangle$. 设

$$\Gamma_0 = \{P_1 x | x \in G_0\} \cup \{P_2 x | x \in G_0\}$$

是关于 P_1 和 P_2 的陪集图. 同上面所见到的, Γ_0 是连通的, 并且有 $\Gamma = \Gamma_0$ 蕴含 $G = G_0$. 假设 $\Gamma \neq \Gamma_0$. 因为 Γ 是连通的, 所以存在 Γ 的边 $\{\alpha, \beta\}$ 使 $\alpha \in \Gamma_0$ 且 $\beta \in \Gamma \backslash \Gamma_0$. 由 10.3.1(a)(运用到 G_0 和 Γ_0 上), G_α 在 G_0 中. 因为 G_α 在 $\Delta(\alpha)$ (见10.3.1(c)) 上传递, 所以不仅 β 而且 $\Delta(\alpha)$ 的每一个其他的元素也在 $\Gamma \backslash \Gamma_0$ 中. 因此在 Γ_0 中没有和 α 邻接的顶点. 于是 Γ_0 非连通, 得到矛盾. □

研究陪集图的必需工具是下面的初等事实:

10.3.3　设 $G = \langle P_1, P_2 \rangle$ 且 $U \leqslant G_\alpha \cap G_\beta$. 假设 $\{\alpha, \beta\}$ 是 Γ 的使下面之一成立的边:

(1) 对 $\delta \in \{\alpha, \beta\}$, $N_{G_\delta}(U)$ 传递地作用在 $\Delta(\delta)$ 上.

(1′) $U \trianglelefteq G_\alpha$ 且 $U \trianglelefteq G_\beta$.

那么 U 平凡地作用在 Γ 上.

证明　因为假设 (1′) 和 10.3.1(c) 一起蕴含了假设 (1), 所以可以假定 (1) 成立. 设

$$\Gamma_0 := \alpha^{N_G(U)} \cup \beta^{N_G(U)}.$$

那么 U 固定 Γ_0 中的每一个顶点. 设 $\gamma \in \Gamma_0$, 则存在 $g \in N_G(U)$ 和 $\delta \in \{\alpha, \beta\}$ 使 $\gamma = \delta^g$. 那么有

$$\Delta(\delta^g) = \Delta(\gamma) \text{ 且 } N_{G_\gamma}(U) = N_{G_\delta}(U)^g.$$

由 (1), $N_{G_\gamma}(U)$ 传递地作用在 $\Delta(\delta^g) = \Delta(\gamma)$ 上, 并且$\{\alpha^g, \beta^g\}$ 中的一个顶点和 γ 邻接从而

$$\{\alpha^g, \beta^g\} \subseteq \Gamma_0.$$

由此得到 $\Delta(\gamma) \subseteq \Gamma_0$. 因为由 10.3.2 得 Γ 是连通的, 所以得到 $\Gamma = \Gamma_0$. 于是 U 稳定 Γ 中的每一个顶点. □

为了处理将在第 12 章再次遇到的特殊情形, 现在给出作用中的融合方法. 对本节的其余部分假定

$\mathcal{A}$ 设 G 是由两个有限子群 P_1 和 P_2 生成的群, 设 $T := P_1 \cap P_2$. 假设对 $i = 1, 2$ 有

$\mathcal{A}_1$ $C_{P_i}(O_2(P_i)) \leqslant O_2(P_i)$.

$\mathcal{A}_2$ $T \in \mathrm{Syl}_2\, P_i$.

$\mathcal{A}_3$ $T_G = 1$.

$\mathcal{A}_4$ $P_i/O_2(P_i) \cong S_3$.

$\mathcal{A}_5$ $[\Omega(Z(T)), P_i] \neq 1$.

研究目标是证明 $\mathcal{A}$ 蕴含

$\mathcal{B}$ $P_1 \cong P_2 \cong S_4$ 或 $P_1 \cong P_2 \cong C_2 \times S_4$.

下面假定 $\mathcal{A}$ 成立. 设 Γ 是 G 关于 P_1 和 P_2 的陪集图. 根据 10.3.2 得 Γ 是连通的, 从而 10.3.1(d) 和 $\mathcal{A}_3$ 一起证明了 G 忠实地作用在 Γ 上.

设 $\{\alpha, \beta\}$ 是 Γ 的边. 因为 $\{\alpha, \beta\}$ 和边 $\{P_1, P_2\}$ 共轭, 所以用 G_α 和 G_β 替代 P_1 和 P_2 论断 $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_5$ 也成立. 在此意义下, 将运用 $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_5$ 到任意的顶点稳定子 G_α 和边 $\{\alpha, \beta\}$ 上.

10.3.4 设 $\{\alpha, \beta\}$ 是 Γ 的一条边.

(a) $G_\alpha \cap G_\beta$ 在 G_α 中的指数是 3 且是 G_α 的 Sylow 2 子群. 特别对所有的 $t \in G_\alpha \backslash G_\beta$ 有 $G_\alpha = \langle G_\alpha \cap G_\beta, t \rangle$.

(b) $|\Delta(\alpha)| = 3$ 且

$$O_2(G_\alpha) = \bigcap_{\delta \in \Delta(\alpha)} (G_\alpha \cap G_\delta) \ (= G_\alpha^{[1]}).$$

(c) G_α 2 重传递地作用在上 $\Delta(\alpha)$.

证明 从 A_4 和 (b) 得到 (a), 从 10.3.1(c), (a) 得到 (c). □

对 $\alpha \in \Gamma$, 设

$$Q_\alpha := O_2(G_\alpha),$$
$$Z_\alpha := \langle \Omega(Z(T)) | T \in \mathrm{Syl}_2 G_\alpha \rangle.$$

10.3.5 设 $\alpha \in \Gamma$, $V \trianglelefteq G_\alpha$ 且 $T \in \mathrm{Syl}_2\, G_\alpha$. 假设

$$\Omega(Z(T)) \leqslant V \leqslant \Omega(Z(Q_\alpha)) \text{ 且 } |V : \Omega(Z(T))| = 2.$$

那么

$$V = C_V(G_\alpha) \times W, \text{ 其中, } W := [V, G_\alpha].$$

进而 $W \cong C_2 \times C_2$ 且 $C_{G_\alpha}(W) = Q_\alpha$, 即 $G_\alpha / C_{G_\alpha}(W) \cong S_3$.

证明 设 $D \in \mathrm{Syl}_3\, G_\alpha$. 由 8.4.2 得到分解

$$V = C_V(D) \times W, \text{ 其中, } W := [V, D].$$

$\mathcal{A}_5$ 和 $G_\alpha = DT$ 蕴含 $W \neq 1$, 从而 $|W| \geqslant 4$. 设 $d \in D^\#$. 由假设条件得到

$$|V/\Omega(Z(T))| = 2 = |V/\Omega(Z(T^d))|.$$

于是 $G_\alpha = \langle T, T^d \rangle$ 表明了 $|V/C_V(G_\alpha) \leqslant 4$. 由此得到 $C_V(G_\alpha) = C_V(D)$ 且 $|W| = 4$. 另一个结论由 $\mathcal{A}_4$ 得到. □

10.3.6　设 $\{\alpha, \beta\}$ 是 Γ 的一条边.

(a) $Z_\alpha \leqslant \Omega(Z(Q_\alpha))$.

(b) $Q_\alpha Q_\beta = G_\alpha \cap G_\beta \in \mathrm{Syl}_2\, G_\alpha$.

(c) $C_{G_\alpha}(Z_\alpha) = Q_\alpha$. 特别地, G_α 的 Sylow 2 子群非交换.

(d) $Z_\alpha Z_\beta$ 正规于 G_α 当且仅当存在 $\gamma \in \Delta(\alpha)\backslash\{\beta\}$ 使 $Z_\alpha Z_\beta = Z_\alpha Z_\gamma$.

证明　(a) 设 $T \in \mathrm{Syl}_2\, G_\alpha$. 那么 $Q_\alpha \leqslant T$, 从而 $\mathcal{A}_1$ 蕴含 $\Omega(Z(Y)) \leqslant Z(Q_\alpha)$.

(b) 由 $\mathcal{A}_4$ 和 10.3.4, Q_α 和 Q_β 在 $G_\alpha \cap G_\beta$ 中的指数为 2. 于是只要证明 $Q_\alpha \neq Q_\beta$.

如果 $Q_\alpha = Q_\beta$, 那么因为 G 忠实地作用在 Γ 上所以由 10.3.3 和 10.3.4 得到 $Q_\alpha = 1$. 这和 $\mathcal{A}_1$ 矛盾.

(c) 由 $\mathcal{A}_5$, 正规子群 Z_α 在 G_α 中是非中心的. 于是因 $G_\alpha = \langle T | T \in \mathrm{Syl}_2\, G_\alpha \rangle$ 得 Z_α 在 $T \in \mathrm{Syl}_2\, G_\alpha$ 中也非中心.

由 (a) 得 $Q_\alpha \leqslant C_{G_\alpha}(Z_\alpha)$. 如果 $Q_\alpha = C_{G_\alpha}(Z_\alpha)$, 那么, 由 $\mathcal{A}_4$ 得 $C_{G_\alpha}(Z_\alpha)$ 包含一个 3 阶子群 D 且 $G_\alpha = DT, T \in \mathrm{Syl}_2\, G_\alpha$. 但在这种情况下 $\Omega(Z(T))$ 在 G_α 中是中心的, 这和 $\mathcal{A}_5$ 矛盾.

(d) 如果 $Z_\alpha Z_\beta \trianglelefteq G_\alpha$, 那么因 G_α 在 $\Delta(\alpha)$ 上传递而得到对所有的 $\gamma \in \Delta(\alpha)$ 有 $Z_\alpha Z_\beta = Z_\alpha Z_\gamma$.

现在假定对某个 $\gamma \in \Delta(\alpha)$ 且 $\gamma \neq \beta$ 有 $Z_\alpha Z_\beta = Z_\alpha Z_\gamma$. 那么 $Z_\alpha Z_\beta$ 被 $G_\alpha \cap G_\beta$ 和 $G_\alpha \cap G_\gamma$ 正规化, 从而也被 G_α 正规化 ($\mathcal{A}_4$). □

为了后面进一步讨论需要证明

10.3.7　设 $\{\alpha, \beta\}$ 是 Γ 的一条边. 那么下面的结论是等价的:

(i) $\mathcal{B}$ 成立.

(ii) $Z_\alpha \not\leqslant Q_\beta$.

证明　假定 $\mathcal{B}$ 成立. 那么由 10.3.1(a), 对 $\delta \in \{\alpha, \beta\}$ 有

$$G_\delta \cong S_4 \quad \text{且} \quad Q_\delta \cong C_2 \times C_2$$

或

$$G_\delta \cong S_4 \times C_2 \quad \text{且} \quad Q_\delta \cong C_2 \times C_2 \times C_2.$$

因此 $Z_\delta = Q_\delta$, 10.3.6(b) 蕴含 $Z_\alpha \not\leqslant Q_\beta$.

假定 $Z_\alpha \not\leqslant Q_\beta$. 令 $\delta \in \{\alpha, \beta\}$ 且记

$$T := Q_\alpha Q_\beta \text{ 且 } E := Q_\alpha \cap Q_\beta.$$

10.3.6(b) 给出了 $T \in \mathrm{Syl}_2\, G_\delta$ 且 $|T/Q_\delta| = 2$. 由此得到

(1) $|Q_\alpha : E| = 2 = |Q_\beta : E|$

和

(2) $T = Q_\beta Z_\alpha$ 且 $Q_\alpha = EZ_\alpha$.

由 10.3.6(c) 得 $[Z_\alpha, Z_\beta] \neq 1$, 从而

$$Z_\beta \not\leqslant Q_\alpha,$$

由对称的论证得到

(3) $T = Z_\alpha Q_\beta$ 且 $Q_\beta = EZ_\beta$.

因为 Z_δ 是 $Z(Q_\delta)$ 的初等交换子群, 所以由 (2) 和 (3) 同 5.2.7 一起得到

$$\Phi(Q_\alpha) = \Phi(E) = \Phi(Q_\beta),$$

即 $\Phi(E)$ 特征于 Q_δ. 因此 $\Phi(E)$ 在 G_α 和 G_β 中正规. 于是从 10.3.3 得到 $\Phi(E)$ 是平凡的, 有

(4) Q_α 和 Q_β 是初等交换的,

并且 $T = Q_\alpha Q_\beta$ 蕴含

(5) $E = Z(T)$.

设 $W_\delta = [Q_\delta, G_\delta]$. 由 (1) 能够应用 10.3.5 到 $V = Q_\delta$ 上, 所以有

(6) $Q_\delta = Z(G_\delta) \times W_\delta$ 且 $W_\delta \cong C_2 \times C_2$.

由 (2) 和 (3), $T \backslash Q_\delta$ 中存在非平凡地作用在 $O^2(G_\delta)/W_\delta$ 上的对合 t_δ. 因此

$$X_\delta := O^2(G_\delta)\langle t_\delta\rangle \cong S_4.$$

假定 $Z(G_\alpha) = 1$. 那么 $|T| = 8$, 从而从 (5) 和 (6) 得到 $Z(G_\beta) = 1$. 于是 $G_\alpha = X_\alpha$ 和 $G_\beta = X_\beta$ 同 $\mathcal{B}$ 中的一样.

假定 $Z(G_\alpha) \neq 1$. 那么再次由 (5) 和 (6) 得到也有 $Z(G_\beta) \neq 1$. 另一方面由 10.3.3 得 $Z(G_\alpha) \cap Z(G_\beta) = 1$. 因为 $Z(G_\alpha)$ 和 $Z(G_\beta)$ 在 $Z(T) = E$ 中, 所以从 (6) 得到 $Z(G_\alpha) \cong C_2 \cong Z(G_\beta)$. 这给出了 $\mathcal{B}$ 中的第 2 种可能性. □

设 $\{\alpha, \beta\}$ 是 Γ 的一条边. 为了证明 $\mathcal{A}$ 蕴含 $\mathcal{B}$, 根据 10.3.7, 只要证明假设 $Z_\alpha \leqslant Q_\beta$ 导致矛盾就可以了. 在这个工作中, 下一段中的 b 起到重要作用.

设 μ 是一个顶点. 因为 Z_μ 忠实地作用在 Γ 上, 所以存在 $\lambda \in \Gamma$ 使 $Z_\mu \not\leqslant G_\lambda$, 特别地有 $Z_\mu \not\leqslant Q_\lambda$. 因为 Γ 是连通的 $d(\mu, \lambda) < \infty$, 所以

$$b := \min\{d(\mu, \lambda) | \mu, \lambda \in \Gamma, Z_\mu \not\leqslant Q_\lambda\}$$

是一个整数. 并且因为 $Z_\mu \leqslant Q_\mu$ 有 $b \geqslant 1$. 顶点对 (α, α') 称为**临界偶**(critical pair), 如果有

$$Z_\alpha \not\leqslant Q_{\alpha'} \text{ 且 } d(\alpha, \alpha') = b.$$

因此对 Γ 的使 $d(\mu, \lambda) < b$ 的顶点 μ 和 λ, 由 b 的极小性得到

$$Z_\mu \leqslant Q_\lambda \text{ 且 } Z_\lambda \leqslant Q_\mu.$$

根据 10.3.7, $b = 1$ 等价于 $\mathcal{B}$ 成立.

下面设 (α, α') 是一个临界偶且 γ 是从 α 到 α' 的长为 b 的路. 重排 γ 的顶点为

$$\gamma = (\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \cdots, \alpha') \text{ 或 } \gamma = (\alpha, \cdots, \alpha'-2, \alpha'-1, \alpha'),$$

即对 $1 \leqslant i \leqslant b-1$ 有 $\alpha' - i = \alpha + (b-i)$. 另外还设

$$R := [Z_\alpha, Z_{\alpha'}].$$

10.3.8 (a) (α', α) 也是临界偶.

(b) $G_\alpha \cap G_{\alpha+1} = Z_{\alpha'} Q_\alpha$ 且 $G_{\alpha'-1} \cap G_{\alpha'} = Z_\alpha Q_{\alpha'}$.

(c) $R \leqslant Z(G_\alpha \cap G_{\alpha+1}) \cap Z(G_{\alpha'-1} \cap G_{\alpha'})$ 且 $R = [Z_\alpha, G_\alpha \cap G_{\alpha+1}] = [Z_{\alpha'}, G_{\alpha'-1} \cap G_{\alpha'}]$.

(d) $|R| = 2$.

(e) $Z_\alpha = [Z_\alpha, G_\alpha] \times \Omega(Z(G_\alpha))$ 且 $[Z_\alpha, G_\alpha] \cong C_2 \times C_2$.

(f) 对 $Y \in \mathrm{Syl}_2\, G_\alpha$ 有 $|Z_\alpha : \Omega(Z(Y))| = 2$.

证明 b 的极小性蕴含了

$$Z_\alpha \leqslant Q_{\alpha'-1} \leqslant G_{\alpha'-1} \cap G_{\alpha'} \text{ 和 } Z_{\alpha'} \leqslant Q_{\alpha+1} \leqslant G_\alpha \cap G_{\alpha+1}.$$

并且因为 $Q_{\alpha'}$ 在 $G_{\alpha'-1} \cap G_{\alpha'}$ 中的指数为 2, 所以由 $Z_\alpha \not\leqslant Q_{\alpha'}$ 证明了

$$G_{\alpha'-1} \cap G_{\alpha'} = Z_\alpha Q_{\alpha'}$$

(见 10.3.4 和 $\mathcal{A}_4$). 因为 Z_α 和 $Z_{\alpha'}$ 分别在 G_α 和 $G_{\alpha'}$ 中正规, 所以得到

(′) $R \leqslant Z_\alpha \cap Z_{\alpha'}$.

于是 10.3.6(c) 蕴含 $R \neq 1$, 从而也有 $Z_{\alpha'} \not\leqslant Q_\alpha$ 和

$$G_\alpha \cap G_{\alpha+1} = Z_{\alpha'} Q_\alpha.$$

由此得到 (a) 和 (b), 由 (′) 和 10.3.6(a) 得到 (c). 另外10.3.6(a)(c) 证明了

$$|Z_\alpha/C_{Z_\alpha}(Z_{\alpha'})| = |Z_{\alpha'}/C_{Z_{\alpha'}}(Z_\alpha)| = 2 \text{ 且 } C_{Z_\alpha}(Z_{\alpha'}) = \Omega(Z(G_\alpha \cap G_{\alpha+1})).$$

这蕴含了 (d) 和 (f) 且由 10.3.5 得到 (e). □

10.3.9 设 $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha)\backslash\{\alpha+1\}$. 假设 $(\alpha-1, \alpha'-1)$ 不是临界偶. 那么下面的结论成立:

(a) $Z_\alpha Z_{\alpha+1} = Z_\alpha Z_{\alpha-1} \trianglelefteq G_\alpha$.

(b) 对所有的 $\beta \in \Delta(\alpha)$ 有 $Q_\alpha \cap Q_\beta \trianglelefteq G_\alpha$.

(c) α 和 α' 共轭, b 是偶数.

证明 因为 $(\alpha-1, \alpha'-1)$ 不是临界偶, 所以得到

$$Z_{\alpha-1} \leqslant Q_{\alpha'-1}\ (\leqslant G_{\alpha'-1} \cap G_{\alpha'}),$$

特别有 $b > 1$ 且

$$Z_{\alpha-1} \overset{10.3.8}{\leqslant} Z_\alpha Q_{\alpha'} \overset{10.3.6}{=} Z_\alpha C_{G_{\alpha'}}(Z_{\alpha'}).$$

由此得到

$$[Z_{\alpha-1}, Z_{\alpha'}] \leqslant R \overset{10.3.6}{\leqslant} Z_\alpha.$$

因此, $Z_{\alpha-1}Z_\alpha$ 被 $Z_{\alpha'}$ 和 $G_{\alpha-1} \cap G_\alpha$ 正规化从而也被 $\langle G_\alpha \cap G_{\alpha-1}, Z_{\alpha'}\rangle = G_\alpha$ 正规化 (见 10.3.4). 于是 10.3.1(c) 蕴含 (a).

从 (a), 10.3.6(c) 以及 G_α 在 $\Delta(\alpha)$ 上的传递性得到论断 (b).

注意到, 由 10.3.1 得 $\alpha \in (\alpha')^G$ 或 $\alpha \in (\alpha'-1)^G$, 所以

$$\alpha \in (\alpha')^G \Leftrightarrow b \text{ 是偶数}.$$

为了证明 (c), 假设 α 和 $\alpha'-1$ 共轭, 从而 G_α 和 $G_{\alpha'-1}$ 也共轭. 那么由 (b) 得到

$$Z_\alpha \leqslant Q_{\alpha'-2} \cap Q_{\alpha'-1} = Q_{\alpha'-1} \cap Q_{\alpha'}.$$

这和 $Z_\alpha \not\leqslant Q_{\alpha'}$ 矛盾. □

10.3.10 假设存在 $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha)\backslash\{\alpha+1\}$ 使 $(\alpha-1, \alpha'-1)$ 是临界偶. 那么 $b = 1$.

证明 设 $R_1 := [Z_{\alpha-1}, Z_{\alpha'-1}]$ 且假定 $b > 1$. 那么 $Z_\alpha \leqslant Q_{\alpha+1}$ 且 $Z_{\alpha'} \leqslant Q_{\alpha'-1}$. 因为 $(\alpha-1, \alpha'-1)$ 是临界的, 所以可用 $(\alpha-1, \alpha'-1)$ 替换 (α, α'), 应用 10.3.8. 因此有 $|R_1| = 2$ 且

$$R_1 = [Z_{\alpha-1}, G_{\alpha-1} \cap G_\alpha] \leqslant Z(G_{\alpha-1} \cap G_\alpha) \cap Z(G_{\alpha'-2} \cap G_{\alpha'-1}).$$

特别有 $R_1 \leqslant Z(Q_{\alpha'-1})$, 从而 $[R_1, Z_{\alpha'}] = 1$. 由 10.3.8, $Z_{\alpha'}$ 和 $G_{\alpha-1} \cap G_\alpha$ 生成 G_α, 所以有

(1) $R_1 \leqslant Z(G_\alpha)$.

设 $\alpha-2 \in \Delta(\alpha-1)\backslash\{\alpha\}$(图 1).

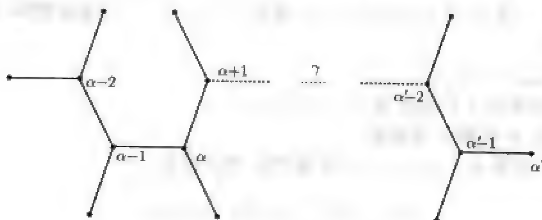


图 1

下面证明:

(2) $(\alpha-2, \alpha'-2)$ 是临界偶.

假设 $(\alpha-2, \alpha'-2)$ 非临界偶. 那么用 $(\alpha-1, \alpha'-1)$ 和 $\alpha-2$ 代替 (α, α') 和 $\alpha-1$, 应用 10.3.9(a) 可证明对所有的 $\delta \in \Delta(\alpha-1)$ 有 $Z_{\alpha-1}Z_\alpha = Z_{\alpha-1}Z_\delta$. 用 10.3.1(c) 得到①

$$Z_{\alpha+1}Z_\alpha = Z_{\alpha+1}Z_{\alpha+2}.$$

由 b 的极小性得 $Z_{\alpha+1}Z_{\alpha+2} \leqslant Q_{\alpha'}$. 但此时也有 $Z_\alpha \leqslant Q_{\alpha'}$, 从而 (α, α') 不是临界偶. 这个矛盾证明了 (2).

设 $R_2 := [Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'-2}]$. 根据 (2), $\alpha-2$ 和 (α, α') 满足假设条件. 因此, 对这些顶点也得到 $|R_2| = 2$ 且

(3) $R_2 = [Z_{\alpha-2}, G_{\alpha-2} \cap G_{\alpha-1}] \leqslant Z(G_{\alpha-1})$.

由 10.3.1(c), 存在 $y \in G_{\alpha-1}$ 和 $x \in G_\alpha$ 使

$$(\alpha-2)^y = \alpha \text{ 且 } (\alpha+1)^x = \alpha-1.$$

因此

$$[Z_\alpha, G_\alpha \cap G_{\alpha-1}] = [Z_{\alpha-2}, G_{\alpha-2} \cap G_{\alpha-1}]^y = R_2{}^y \leqslant Z(G_{\alpha-1}),$$

从而

$$R^x \overset{10.3.8(c)}{=\!=\!=} [Z_\alpha, G_\alpha \cap G_{\alpha+1}]^x = [Z_\alpha, G_\alpha \cap G_{\alpha-1}] = R_2{}^y \leqslant Z(G_{\alpha-1}).$$

由此得到

① 绕 α 旋转使 $\alpha-1$ 旋转到 $\alpha+1$.

(4) $R \leqslant Z(G_{\alpha+1})$.

另外 (1) 和 10.3.3 给出了

(5) $R \cap R_1 = 1$.

下面证明:

(6) $b = 2$.

假设 $b > 2$. 那么 $Z_{\alpha'} \leqslant Q_{\alpha'-2}$, 由 (3) 和 10.3.6(a) 得到 R_2 中心化 $Z_{\alpha'}$ 和 $G_{\alpha-1}$. 因为 $G_\alpha = \langle Z_{\alpha'}, G_\alpha \cap G_{\alpha-1}\rangle$, 所以推出 R_2 中心化 $G_{\alpha-1}$ 和 G_α. 因此由 10.3.3 得 $R_2 = 1$, 这和 $|R_2| = 2$ 矛盾.

为了处理剩下的 $b = 2$ 的情形, 设

$$V_\alpha := \langle Z_\beta | \beta \in \Delta(\alpha)\rangle \ (\trianglelefteq G_\alpha)$$

和

$$V_{\alpha+1} := \langle Z_\beta | \beta \in \Delta(\alpha+1)\rangle \ (\trianglelefteq G_{\alpha+1})$$

注意到 $V_\alpha \leqslant Q_\alpha$ 且因 $b > 1$ 而有 $V_{\alpha+1} \leqslant Q_{\alpha+1}$, 并且因为 V_α 正规于 G_α 而有

$$Z_\alpha = \langle \Omega(Z(G_\alpha \cap G_{\alpha+1}))^{G_\alpha}\rangle \leqslant V_\alpha,$$

类似地, 有 $Z_{\alpha+1} \leqslant V_{\alpha+1}$. 因此得

(7) $Z_\alpha Z_{\alpha+1} \leqslant V_\alpha \cap V_{\alpha+1}$.

因为 $R_1 \leqslant Z(G_\alpha)$, 所以 G_α 在 $\Delta(\alpha)$ 上的 2 重传递作用 (见 10.3.4(c)) 蕴含了

$$V'_\alpha = R_1 \leqslant Z(G_\alpha).$$

现在用导出矛盾的方法证明 V_α 是交换的: 因为 V_α 由对合生成所以 V_α/R_1 是初等交换的, 因此

$$R_1 = \Phi(V_\alpha).$$

用相同的论证得 (4) 蕴含

$$R = \Phi(V_{\alpha+1}).$$

设

$$\overline{V}_\alpha := V_\alpha / Z_\alpha.$$

从 10.3.8(f) 得到对所有的 $\beta \in \Delta(\alpha)$ 有 $|Z_\beta / Z_\alpha \cap Z_\beta| = 2$, 所以 $|\overline{Z}_\beta| = 2$. 另外, $\overline{V}_\alpha$ 由 3 个子群 $\overline{Z}_\beta, \beta \in \Delta(\alpha)$ 生成, 从而有

$$|\overline{V}_\alpha| \leqslant 8.$$

设

$$W := V_\alpha \cap V_{\alpha+1}\ (\trianglelefteq G_\alpha \cap G_{\alpha+1}).$$

由 (7)，$Z_\alpha Z_{\alpha+1} \leqslant W$，由 V_α 的定义得到

(8) $V_\alpha = \langle W^{G_\alpha}\rangle$.

并且由 84 页 5.2.7 得到

$$\Phi(W) \leqslant \Phi(V_\alpha) \cap \Phi(V_{\alpha+1}) = R_1 \cap R \overset{(5)}{=} 1.$$

因此 W 是初等交换的且由 $V_\alpha' \neq 1$ 证明 $|V_\alpha/W| \geqslant 2$.

研究 G_α 在 $\overline{V}_\alpha$ 上的作用. 因为 $[G_{\alpha-1}\cap G_\alpha, Z_{\alpha-1}] = R_1 \leqslant Z_\alpha$ 所以这个作用的核包含 Q_α. 设

$$\overline{V}_0 := [\overline{V}_\alpha, O^2(G_\alpha)].$$

如果 $\overline{V}_0 = 1$, 那么 W 正规于 G_α 且 $V_\alpha' = 1$. 但这和 $V_\alpha' = R_1$ 且 $|R_1| = 2$ 矛盾.

现在设 $\overline{V}_0 \neq 1$. 因为 $\overline{V}_\alpha \leqslant 8$ 得到

(9) $|\overline{V}_0| = 4$.

首先假设 $|V_\alpha/W| = 2$. 设 $x \in G_\alpha$ 使 $W^x \neq W$. 那么 $V_\alpha = WW^x$ 从而 $W \cap W^x = Z(V_\alpha)$ 且 $|V_\alpha/W\cap W^x| = 4$. 设 $D \in \mathrm{Syl}_3\, G_\alpha$. D 在 $\overline{V}_\alpha$ 上的非平凡作用蕴含 D 在 $V_\alpha/W\cap W^x$ 上的非平凡作用. 因此 V_α 的所有包含 $W\cap W^x$ 的极大子群是 W 的 D 共轭. 但此时有 $V_\alpha{}^{\#}$ 的每一个元素是对合, 从而 V_α 是初等交换的. 这再次和 $V_\alpha' = R_1$ 矛盾.

证明了

$$|V_\alpha/W| \geqslant 4.$$

由 (7) 和 $|\overline{V}_\alpha| \leqslant 8$ 得到

(10) $|\overline{V}_\alpha| = 8$, $W = Z_\alpha Z_{\alpha+1}$ 且 $|\overline{W}| = 2$.

因为 $Z_{\alpha'} \leqslant G_\alpha$ 且 $Z_{\alpha'} \not\leqslant Q_\alpha$, 所以得到 $[\overline{V}_0, Z_{\alpha'}] \neq 1$. 另一方面, 由于 $b = 2$, 从而有

$$[V_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant [V_\alpha, V_{\alpha+1}] \leqslant W,$$

所以 $\overline{W} = [\overline{V}_0, Z_{\alpha'}]$. 那么有 $\langle \overline{W}^{G_\alpha}\rangle = \overline{V}_0$, 这和 (8), (9) 及 (10) 矛盾. □

10.3.11　定理　假设 $\mathcal{A}$ 成立. 那么有

$$P_1 \cong P_2 \cong S_4 \text{ 或 } P_1 \cong P_2 \cong C_2 \times S_4.$$

证明　假定 G 是反例. 在所有满足 $\mathcal{A}$ 但不满足 $\mathcal{B}$ 的 (G, P_1, P_2, T) 中, 选取使 $|T|$ 极小的 (G, P_1, P_2, T). 那么有 $b > 1$ 且对所有的 $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha)\backslash\{\alpha+1\}$ 都有 $(\alpha-1, \alpha'-1)$ 非临界 (见 10.3.10). 因此 10.3.9 蕴含

(1) $b \equiv 0 \pmod 2$ 且 $X := Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1} \trianglelefteq G_\alpha$.

并且由 10.3.3(b) 和 10.3.4(a) 得到 $|Q_\alpha : X| = |Q_{\alpha+1} : X| = 2$. 设

$$D \in \mathrm{Syl}_3\, G_\alpha \text{ 和 } \overline{G}_\alpha := G_\alpha/X.$$

那么 $\overline{G}_\alpha$ 是 12 阶群且 $\overline{Q}_\alpha$ 是 2 阶正规子群. 由此得到 $\overline{D}$ 也正规于 $\overline{G}_\alpha$. 设 $X \leqslant L \leqslant G_\alpha$ 使 $\overline{L} = \overline{DQ}_{\alpha+1}$, 有

(2a) L 是 G_α 的指数为 2 的正规子群,

(2b) $\overline{L} \cong S_3$,

(2c) $\mathrm{Syl}_2\, L = \{Q_\beta | \beta \in \Delta(\alpha)\}$,

(2d) 对所有的 $\beta \in \Delta(\alpha)$ 有 $O_2(L) = X = Q_\alpha \cap Q_\beta$,

(2e) $Q_{\alpha+1} = Z_{\alpha'} O_2(L)$ (见10.3.8(b)).

(2f) $C_L(O_2(L)) \leqslant O_2(L)$.

对于 (2f) 的证明, 注意到 Z_α ($\trianglelefteq G_\alpha$) 包含在 $Q_{\alpha+1}$ 中, 从而也包含在 $O_2(L)$ 中. 因此有

$$C_L(O_2(L)) \leqslant C_L(Z_\alpha) \overset{10.3.6}{\leqslant} Q_\alpha \cap L \leqslant O_2(L).$$

根据 $\mathcal{A}_4$, 存在元素 $t \in G_{\alpha+1} \backslash Q_{\alpha+1}$ 使

$$\alpha^t = \alpha + 2 \text{ 且 } t^2 \in Q_{\alpha+1}.$$

于是 $Q_{\alpha+1} = (Q_{\alpha+1})^t$ 是 L ($\leqslant G_\alpha$) 和 L^t ($\leqslant G_{\alpha+2}$) 的 Sylow 2 子群. 首先证明

(3) $O_2(L)$ 不是初等交换的.

假设 $O_2(L)$ 是反例. 那么由 (2b) 和 (2d) 得 $A_1 := O_2(L)$ 和 $A_2 := O_2(L^t)$ 是 $Q_{\alpha+1}$ 中的两个指数为 2 的初等交换子群. 如果 $A_1 = A_2$, 那么 A_1 正规于 $\langle G_\alpha, G_{\alpha+2} \rangle$ 从而也正规于

$$\langle G_\alpha, G_\alpha \cap G_{\alpha+1}, G_{\alpha+1} \cap G_{\alpha+2} \rangle = \langle G_\alpha, G_{\alpha+1} \rangle = G.$$

但这与 $\mathcal{A}_3$ 和 (2f) 矛盾.

证明了 $A_1 \neq A_2$. 由于 (2b), (2c) 和 (2f) 得 $Q_{\alpha+1}$ 是非交换群; 所以有

$$A := A_1 \cap A_2 = Z(Q_{\alpha+1}) \text{ 且 } |Q_{\alpha+1}/A| = 4.$$

如果 $O^2(G_{\alpha+1})$ 平凡地作用在 $Q_{\alpha+1}/A$ 上, 那么

$$\langle G_\alpha, O^2(G_{\alpha+1}) \rangle \leqslant N_G(A_1),$$

这和 10.3.3 矛盾. 于是 $O^2(G_{\alpha+1})$ 传递地作用在 $(Q_{\alpha+1}/A)^\#$ 上. 那么 $Q_{\alpha+1}^\#$ 的每一个元素是对合从而 $Q_{\alpha+1}$ 是初等交换的, 再次得到矛盾. 这证明了 (3).

现在设

$$G_0 := \langle L, L^t \rangle,$$

且记 G_0 在 $Q_{\alpha+1}$ 中的极大正规子群为 Q. 注意到 $G_0^t = G_0$ 从而也有 $Q^t = Q$. 下面证明:

(4) $[Q, D] \neq 1$.

对于 (4) 的证明, 假定 $[Q, D] = 1$ 且设

$$\widetilde{G}_0 := G_0/Q^{①}.$$

因为 $Q_{\alpha+1} \in \mathrm{Syl}_2\, L \cap \mathrm{Syl}_2\, L^t$ 和 (2), 所以四元组

$$(\widetilde{G}_0, \widetilde{L}, \widetilde{L}^t, \widetilde{Q}_{\alpha+1})$$

满足假设 $\mathcal{A}_2 \sim \mathcal{A}_4$. 并且因为 $[Q, D] = 1$ 所以 10.3.6(c) 和 140 页 8.2.2 蕴含

$$\widetilde{W} := [\widetilde{Z}_\alpha, \widetilde{D}] \neq 1 \ (Q \leqslant W \leqslant O_2(L))$$

且 $C_{\widetilde{L}}(O_2(\widetilde{L}) \leqslant O_2(\widetilde{L})$, 所以 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_5$ 也成立.

现在用到 $|T|$ 的极小性. 因为 $|Q_{\alpha+1}| < |T|$, 得到

$$\widetilde{L} \cong S_4 \text{ 或 } \widetilde{L} \cong C_2 \times S_4.$$

特别地, 由 10.3.5 得

$$\widetilde{W} = [O_2(\widetilde{L}), O^2(\widetilde{L})] \nleqslant O_2(\widetilde{L}^t)$$

且 $\widetilde{W} \leqslant \widetilde{Z}_\alpha$ 蕴含 $Z_\alpha \nleqslant O_2(L^t)$. 于是由 (2b) 得到

$$O_2(L) = (O_2(L) \cap O_2(L^t))Z_\alpha.$$

因为 $Z_\alpha \leqslant \Omega(Z(O_2(L)))$, 所以得到

$$\Phi(O_2(L)) = \Phi((O_2(L) \cap O_2(L^t))),$$

由通过 t 共轭得 $\Phi(O_2(L)) = \Phi(O_2(L^t))$. 但现在由同步骤 (3) 的证明中那样得到 $\Phi(O_2(L))$ 正规于 $\langle G_\alpha, G_{\alpha+2} \rangle = G$, 从而由 $\mathcal{A}_3$ 得到 $\Phi(O_2(L)) = 1$. 这和 (3) 矛盾, 从而 (4) 成立.

(5) 设 $\beta \in \Delta(\alpha)$ 且 $\gamma \in \Delta(\beta) \backslash \{\alpha\}$, 那么 $\langle Z_\alpha, Z_\gamma \rangle$ 不正规于 L.

固定符号 $\Delta(\beta) = \{\alpha, \gamma, \delta\}$ 且设

$$V_\beta := \langle Z_\alpha, Z_\gamma, Z_\delta \rangle \ (\trianglelefteq G_\beta).$$

① 用波纹代替横线.

$Q_\alpha \backslash Q_\beta$ 中的每一个元素 x 交换 γ 和 δ 且正规化 L (见 (2a)). 如果 $\langle Z_\alpha, Z_\gamma\rangle$ 正规于 L, 那么 $\langle Z_\alpha, Z_\delta\rangle = \langle Z_\alpha, Z_\gamma{}^x\rangle$ 也正规于 L. 这蕴含了 V_β 正规于 $L(\not\leqslant G_\alpha \cap G_\beta)$, 这和 10.3.3 矛盾.

(6) 设 $b \geqslant 4$, $\alpha-1 \in \Delta(\alpha)\backslash\{\alpha+1\}$ 且 $\alpha-2 \in \Delta(\alpha-1)\backslash\{\alpha\}$. 那么 $(\alpha-2, \alpha'-2)$ 是临界偶.

假设 $(\alpha-2, \alpha'-2)$ 非临界. 那么 $Z_{\alpha-2} \leqslant Q_{\alpha'-3} \cap Q_{\alpha'-2}$. 因为由 (1) 得 $\alpha'-2$ 和 α 共轭, 所以得到

$$Z_{\alpha-2} \leqslant Q_{\alpha'-3} \cap Q_{\alpha'-2} \overset{(1)}{=} Q_{\alpha'-2} \cap Q_{\alpha'-1} \leqslant G_{\alpha'-1} \cap G_{\alpha'} \xlongequal{10.3.8(b)} Z_\alpha Q_{\alpha'},$$

于是有 $[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'}] \leqslant [Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant Z_\alpha$. 因此 $Z_{\alpha-2}Z_\alpha$ $(\leqslant Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1})$ 被 $Z_{\alpha'}$ 正规化从而也被 $Q_{\alpha-1}$ $(\leqslant G_{\alpha-2} \cap G_\alpha)$ 正规化. 于是 (2) 蕴含 $Z_{\alpha-2}Z_\alpha$ 正规于 L, 这和 (5) 矛盾.

下面设 $\alpha-1 \in \Delta(\alpha)\backslash\{\alpha+1\}$ 且 $x \in L$ $(\leqslant G_\alpha)$, 使 $(\alpha+1)^x = \alpha-1$. 那么

$$\alpha - 2 := (\alpha+2)^x$$

和 $\alpha-1$ 邻接且不同于 α 和 $\alpha+2$.

设 $b \geqslant 4$. 由 (6), $(\alpha-2, \alpha'-2)$ 是临界的. 因此 10.3.8 蕴含

$$R_2 := [Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'-2}] \leqslant Z(G_{\alpha-2} \cap G_{\alpha-1}) \cap Z_{\alpha'-2}.$$

另外 $b \geqslant 4$ 蕴含 $Z_{\alpha'} \leqslant Q_{\alpha'-2}$, 从而也有 $[R_2, Z_{\alpha'}] = 1$. 于是 (2) 给出 $[R_2, L] = 1$, 因为 $x \in L$ 而有

$$R_2 \leqslant Z(G_{\alpha+2} \cap G_{\alpha+1}).$$

因为 (α', α) 也是临界偶 (见 10.3.8(a)), 所以存在 $\alpha'+2$ 使 $d(\alpha', \alpha'+2) = 2$ 且 $(\alpha'+2, \alpha+2)$ 是临界的. 假设 $b > 4$. 那么 $Z_{\alpha'+2} \leqslant Q_{\alpha'-2}$, 从而因为 $R_2 \leqslant Z_{\alpha'-2}$ 而有

$$[R_2, Z_{\alpha'+2}] = 1.$$

因此

$$G_{\alpha+2} \cap G_{\alpha+3} \xlongequal{10.3.8(b)} Q_{\alpha+2} Z_{\alpha'+2}$$

被 R_2 中心化. 由此得到 $R_2 \leqslant Z(G_{\alpha+2})$, 在用 $x \in L$ 共轭后也有 $R_2 \leqslant Z(G_{\alpha-2})$. 这和 $Z_{\alpha'-2}$ 在 $Z_{\alpha-2}$ 上的作用矛盾, 见 10.3.8(b), (e) 和 (f).

已经证明了

(7) $b \leqslant 4$.

现在证明 (7) 和 (4) 矛盾来导出最后的矛盾.

因为 $Q \leqslant O_2(L^t) \leqslant Q_{\alpha+2}$, 所以

(′) $[Q, Z_{\alpha+2}] = 1$.

现在分 2 种情况 $Z_{\alpha+2} \nleqslant O_2(L)$ 和 $Z_{\alpha+2} \leqslant O_2(L)$ 来讨论.

在第 1 种情形有 $Q_{\alpha+1} = O_2(L)Z_{\alpha+2}$ 且

$$L = \langle Z_{\alpha+2}^L \rangle O_2(L) = C_L(Q)O_2(L).$$

因为 Q 正规于 L 这蕴含了 $O^2(L) \leqslant C_L(Q)$. 特别有 $[Q, D] = 1$, 这和 (4) 矛盾.

于是面临情况 $Z_{\alpha+2} \leqslant O_2(L)$. 那么 $Z_{\alpha+2} \leqslant Q_\alpha$, 而 (7) 和 (1) 证得 $b = 4$. 因此 (6) 蕴含

$$Z_{\alpha+2} \nleqslant Q_{\alpha-2} = Q_{(\alpha+2)^x},$$

L^{tx} 是 G_α 中指数为 2 的正规子群. 子群

$$\langle (Z_{\alpha+2})^{L^{tx}} \rangle \ (\leqslant G_0)$$

包含 $G_{\alpha-2}$ 的 Sylow 3 子群 D_2. 于是由上面的 (′) 和 $Q \trianglelefteq G_0$ 得到 $[Q, D_2] = 1$. 由 D_2 是 G_α 的 Sylow 3 子群 D 的 G_0 共轭得这和 (4) 矛盾. □

以两个满足 $\mathcal{A}$ 从而也满足 $\mathcal{B}$ 的群例来结束本节. 它们也是满足条件 $\mathcal{B}$ 的两个例子.

(1) 设 G 是对称群 S_6,

$$a := (12), \quad b := (12)(34)(56)$$

且

$$P_1 := C_G(a), \ P_2 := C_G(b).$$

那么对 $x \in G$ 有

$$x \in P_1 \Leftrightarrow \{1,2\}^x = \{1,2\} \Leftrightarrow \{3,4,5,6\}^x = \{3,4,5,6\}.$$

于是有

$$P_1 = \langle a \rangle \times G_{1,2} \cong C_2 \times S_4 \text{①},$$
$$O_2(P_1) = \langle a \rangle \times \langle (34)(56) \rangle \times \langle (35)(46) \rangle,$$

且

$$T := O_2(P_1)\langle (34) \rangle \in \mathrm{Syl}_2\ P_1.$$

类似地, 对 $x \in G$ 和 $\Omega := \{(12), (34), (56)\}$ 有

---

① $G_{1,2} := \{x \in G | 1^x = 1 \text{ 且 } 2^x = 2\}$.

$$x \in P_2 \Leftrightarrow \Omega^x = \Omega.$$

因此 P_2 作用在 Ω 上. 这个作用的核为

$$N := \langle(12)\rangle \times \langle(34)\rangle \times \langle(56)\rangle$$

且

$$P_2/N \cong S_\Omega \cong S_3.$$

由此得到 $N = O_2(P_2)$ 且

$$N\langle(35)(46)\rangle = T$$

是 P_2 的 Sylow 2 子群. 注意到进一步有 $P_1 \neq P_2$ 且 $|P_1 : T| = 3 = |P_2 : T|$, 所以 $P_1 \cap P_2 = T$. 另外还有

$$|G : \langle P_1, P_2\rangle| \leqslant \frac{|G|}{|P_1P_2|} = \frac{6!}{3 \cdot 48} = 5.$$

从而因 P_1 不包含在单群 A_6 中有 $G = \langle P_1, P_2\rangle$ (见 3.1.2). 这表明了三维有序组 $(\langle P_1, P_2\rangle, P_1, P_2)$ 满足 $\mathcal{A}$.

应该注意到三维有序组 $(A_6, P_1 \cap A_6, P_2 \cap A_6)$ 是满足条件 $\mathcal{B}$ 的另一个例子.

(2) 设 $G := \mathrm{GL}_3(2)$ 是 $\mathbb{F}_2$ 上的可逆 3×3 矩阵组成的群. 设 P_1 是所有具有形式

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix}$$

的元素 $\boldsymbol{x} \in G$ 的集合, P_2 是所有具有形式

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}$$

的元素 $\boldsymbol{x} \in G$ 的集合, 其中, $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{F}_2$. 那么 P_1 和 P_2 是 G 的子群.

映射

$$\varphi : P_1 \to \mathrm{SL}_2(2) \text{ 使 } \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} d & e \\ f & g \end{pmatrix},$$

$$\varphi : P_2 \to \mathrm{SL}_2(2) \text{ 使 } \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

是核分别为

$$\text{Ker }\varphi_1=\left\{\left.\begin{pmatrix}1&b&c\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right|b,c\in\mathbb{F}_2\right\}\cong C_2\times C_2,$$

$$\text{Ker }\varphi_2=\left\{\left.\begin{pmatrix}1&0&c\\0&1&f\\0&0&1\end{pmatrix}\right|c,f\in\mathbb{F}_2\right\}\cong C_2\times C_2$$

的满同态. 因为 $\text{Ker }\varphi_i(i=1,2)$ 在 P_i 中有忠实地作用在 $\text{Ker }\varphi_i$ 上的补, 所以

$$P_1\cong S_4\cong P_2,$$

并且

$$P_1\cap P_2=\left\{\left.\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\right|a,b,c\in\mathbb{F}_2\right\}$$

是 8 阶子群从而是 P_1 和 P_2 的 Sylow 2 子群. 因为

$$|G:\langle P_1,P_2\rangle|\leqslant\frac{|G|}{|P_1P_2|}=\frac{168}{72}<3$$

且 G 的阶不能被 16 整除, 所以 $G=\langle P_1,P_2\rangle$. 因此三维有序组 $(\langle P_1,P_2\rangle,P_1,P_2)$ 满足 $\mathcal{A}$.

第11章　信号函子

在前面的章节中, 了解到非平凡 p 子群的正规化子 (即 p 局部子群) 对有限群的结构具有特殊的重要性是显然的. 本章介绍在某种意义上和正规化概念对偶的另一个重要概念.

设 G 是群, A 是 G 的子群. A 的正规化子概念是关系到满足 $A^U = A$ 的子群 U, 然而现在关注满足 $U^A = U$ 的子群 U.

正规化子概念的这个对偶是 Feit-Thompson 定理证明中的一种基本思想. Gorenstein 发展了信号函子的一般概念[60], 这是群论的一项重大成就.

本章的目的是给出 Glauberman 完备定理[52] 的一个证明. 这个定理的两个重要情形 ($r(A) \geqslant 4$ 和 $p = 2$) 较早地被 Goldschmidt 证明[56,55]. 另一个证明是 Bender[31] 给出的. 后来他的证明被 Aschbacher[1] 推广而得到完备定理的一个新的证明.

本章中, A 总是一个 p 群, 而所考虑的 A 不变子群往往是 p' 子群. 因此经常用到在 8.2.2, 8.2.3, 8.2.7 和 8.3.4 中给出的互素作用的初等性质. 用缩写 (cp) 表示这些性质.

我们发现把 A 看作作用在 G 上的群而不看成是 G 的子群是有好处的.

11.1　定义和基本性质

在下面 p 是素数, A 是作用在 G 上的非循环初等交换 p 群. 注意到, 因为 A 是交换群所以对每一个 $a \in A$ 不动点群 $C_G(a)$ 都是 A 不变的.

设 U 是 G 的 A 不变 p' 子群. 那么 8.3.4 蕴含

(+) $U = \langle C_G(a) \cap U | a \in A^{\#} \rangle$.

这给出下面的一个推广.

设 θ 是一个把每一个 $a \in A^{\#}$ 和 $C_G(a)$ 的一个 A 不变且可解的 p' 子群相联系的映射①. 这个子群记作 $\theta(C_G(a))$, 所以

$$\theta(C_G(a)) := a^{\theta}.$$

用 $\mathcal{U}_\theta(A)$ 记 G 的满足

① 这节大多数结果没有可解性要求的话也成立.

$$\text{对所有 } a,b\in A^{\#} \text{ 都有 } C_G(a)\cap U\leqslant\theta(C_G(a))$$

的 A 不变 p' 子群的集合. 换句话说, 对 $U\in И_\theta(A)$ 有

$(+')$ $U=\langle\theta(C_G(a))\cap U|a\in A^{\#}\rangle$,

并且从定义很容易知道 U 的每一个 A 不变子群也在 $И_\theta(A)$ 中.

如果

$\mathcal{S}$ 对所有的 $a,b\in A^{\#}$ 有 $\theta(C_G(a))\cap C_G(b)\leqslant\theta(C_G(b))$,

或等价的有

$\mathcal{S}'$ 对所有的 $a\in A^{\#}$ 有 $\theta(C_G(a))\in И_\theta(A)$.

那么映射 θ 叫做 G 上**可解 A 信号函子**(solvable A-signalizer functor).

如果 $И_\theta(A)$ 包含一个唯一的极大元素[①], 那么可解 A 信号函子叫做**完备的**(complete). 如果 θ 是完备的, 就把 $И_\theta(A)$ 的唯一极大元素记作 $\theta(G)$.

设 θ 是 G 上的可解 A 信号函子且

$$E:=\langle\theta(C_G(a))|a\in A^{\#}\rangle.$$

性质 $(+)$ 蕴含 θ 是完备的当且仅当 $E\in И_\theta(A)$. 于是如果 θ 是完备的, 那么 $E=\theta(G)$.

本章的目的是证明如果 $r(A)\geqslant 3$ 那么 θ 是完备的, 这就是 Glauberman 完备定理.

对 G 的一个 A 不变子群 H,

$$\theta_H: a\mapsto\theta_H(C_H(a)):=\theta(C_G(a))\cap H\quad(a\in A^{\#})$$

是 θ 到 H 上的**限制**(restriction), 这里

$$И_{\theta_H}(A)=\{U\in И_\theta(A)|U\leqslant H\}.$$

如果 θ 是完备的, 那么 θ_H 也是完备的且

$$\theta_H(H)=\theta(G)\cap H.$$

如果 θ_H 是完备的, 设 $\theta(H):=\theta_H(H)$.

条件 $\mathcal{S}'$ 说对每一个 $a\in A^{\#}$, 限制 $\theta_{C_G(a)}$ 是完备的且 $\theta(C_G(a))$ 是唯一的极大元素. 显然对的 A 每一个非平凡子群 B, $\theta_{C_G(B)}$ 也是完备的且

$$\theta(C_G(B))=\theta(C_G(a))\cap C_G(B)=\bigcap_{b\in B^{\#}}\theta(C_G(b))\quad(a\in B^{\#}).$$

① 关于包含关系.

在继续信号函子的性质之前, 给出一个典型的例子.

11.1.1 设 p 是素数且

$$\theta : a \mapsto O_{p'}(C_G(a)) \quad (a \in A^{\#}).$$

(a) 假设对所有 $a \in A^{\#}$, $C_G(a)$ 是可解的, 那么 θ 是 G 上的可解 A 信号函子.

(b) 假设 G 是可解的, 那么 θ 是完备的且 $\theta(G) = O_{p'}(G)$.

证明 (a) 对 $a, b \in A^{\#}$, 由 8.2.12 有

$$O_{p'}(C_G(a)) \cap C_G(b) \leqslant O_{p'}(C_{C_G(b)}(a)) \leqslant O_{p'}(C_G(b)).$$

从而 $\mathcal{S}$ 成立.

(b) 再次由 8.2.12 得

$$\theta(C_G(a)) = O_{p'}(G) \cap C_G(a),$$

所以 $O_{p'}(G) \in \textit{И}_\theta(A)$ 且

$$O_{p'}(G) = \langle \theta(C_G(a)) | a \in A^{\#} \rangle \in \textit{И}_\theta(A).$$

因此 θ 是完备的且 $\theta(G) = O_{p'}(G)$. □

在下面, θ 是 G 上的可解 A 信号函子. 设

$$C_a := \theta(C_G(a)), \quad a \in A^{\#},$$
$$C_B := \theta(C_G(B)), \quad 1 \neq B \leqslant A,$$
$$\textit{И}^*_\theta(A) : \textit{И}_\theta(A) \text{ 的极大元素的集合},$$

且对素数集合 π 定义

$$\textit{И}_\theta(A, \pi) := \{U \in \textit{И}_\theta(A) | U \text{ 是 } \pi \text{ 群}\},$$
$$\textit{И}^*_\theta(A, \pi) : \textit{И}_\theta(A, \pi) \text{ 的极大元素的集合}.$$

11.1.2 设 $X, Y \in \textit{И}_\theta(A)$ 使 $XY = YX$. 假设

(1) $Y \leqslant N_G(X)$ 或

(1′) XY 是可解的.

那么 $XY \in \textit{И}_\theta(A)$.

证明 在情形 (1) 下也有 XY 是可解的 (见 6.1.2). 于是在两种情形下 XY 都是 A 不变可解 p' 群. 因此 8.2.11 蕴含

$$\text{对所有的 } a \in A^{\#}, \text{ 有 } C_{XY}(a) = C_X(a)C_Y(a) \leqslant C_a,$$

所以 $XY \in \text{И}_\theta(A)$.

11.1.3　设 N 是 G 的 A 不变正规 p' 子群, $\overline{G} := G/N$. 那么映射

$$\overline{\theta} : a \mapsto \overline{\theta}(C_{\overline{G}}(a)) := \overline{C}_a, \quad a \in A^{\#}$$

是 G 上的可解 A 不变信号函子且 $\overline{\text{И}_\theta(A)} \subseteq \text{И}_{\overline{\theta}}(A)$.

证明　设 $a, b \in A^{\#}$ 且 $M := NC_a$, 则有

$$\overline{M} = \overline{\theta}(C_{\overline{G}}(a)) \text{ 且 } C_{\overline{M}}(b) \overset{\text{(cp)}}{=} \overline{C_M(b)}.$$

由此得到

$$C_M(b) \overset{8.2.11}{=} C_N(b)C_{C_a}(b) = C_N(b)(C_a \cap C_G(b)) \leqslant N\theta(C_G(b)).$$

从而

$$\overline{\theta}(C_{\overline{G}}(a)) \cap C_{\overline{G}}(b) = C_{\overline{M}}(b) = \overline{C_M(b)} \leqslant \overline{\theta}(C_{\overline{G}}(b)).$$

类似地, 对 $U \in \text{И}_\theta(A)$ 有

$$C_{\overline{U}}(a) \overset{\text{(cp)}}{=} \overline{C_U(a)} = \overline{C_a \cap U} \leqslant \overline{\theta}(C_{\overline{G}}(a)),$$

$\overline{U} \in \text{И}_{\overline{\theta}}(A)$. □

11.1.4　假设在 11.1.3 中还有 $N \in \text{И}_\theta(A)$, 那么 $\overline{\text{И}_\theta(A)} = \text{И}_{\overline{\theta}}(A)$. 特别地, θ 是完备的当且仅当 $\overline{\theta}$ 是完备的.

证明　设 $N \leqslant U \leqslant G$ 使 $\overline{U} \in \text{И}_{\overline{\theta}}(A)$. 根据 11.1.3, 只要证明 $U \in \text{И}_\theta(A)$.

对 $a \in A^{\#}$ 有

$$\overline{C_U(a)} \overset{\text{(cp)}}{=} C_{\overline{U}}(a) \leqslant \overline{\theta}(C_{\overline{G}}(a)) = \overline{C}_a = C_aN/N,$$

从而因 $N \in \text{И}_\theta(A)$ 而有

$$C_U(a) \leqslant NC_a \cap C_G(a) = C_N(a)C_a \leqslant C_a.$$

因此 $U \in \text{И}_\theta(A)$. □

现在设

$$\pi(\theta) := \bigcup_{a \in A^{\#}} \pi(C_a).$$

11.1.5　设 $U \in \text{И}_\theta(A)$. 那么 $\pi(U) \subseteq \pi(\theta)$.

证明　由 (cp), 对每一个 $q \in \pi(U)$ 都存在 U 的 A 不变 Sylow q 子群 Q, 并且因为 A 是非循环的所以存在 $a \in A$ 使 $C_Q(a) \neq 1$(见 8.3.4). 因为 $C_Q(a) \leqslant C_U(a) \leqslant C_a$ 所以得到 $q \in \pi(\theta)$. □

显然, θ 到 A 不变子群上的限制和可解 A 信号函子 $\overline{\theta}$(同 11.1.3 中的) 都能够在运用归纳法进行证明时获得应用. 但是在这方面 θ 的另一个减少 $\pi(\theta)$ 中素数个数的变化更重要.

设 π 是使 $p \notin \pi$ 的素数集合①. 把 8.2.6(d) 用于可解且 A 不变 p' 群 $C_a = \theta(C_G(a))$ $(a \in A^{\#})$ 上. 那么 C_a 包含了唯一的极大 AC_A 不变 π 子群②, 把这个子群记作 $\theta_\pi(C_G(a))$.

11.1.6 映射

$$\theta_\pi : a \mapsto \theta_\pi(C_G(a)) \ (a \in A^{\#})$$

是 G 上的可解 A 信号函子且满足

$$\pi(\theta_\pi) \subseteq \pi \text{ 且 } \{U \in \mathcal{U}_\theta(A,\pi) | U^{C_A} = U\} \subseteq \mathcal{U}_{\theta_\pi}(A).$$

证明 设 $a, b \in A^{\#}$. 那么 $\theta_\pi(C_G(a)) \cap C_G(b)$ 是 C_b 的 AC_A 不变 π 子群. 于是 $\theta_\pi(C_G(a)) \cap C_G(b)$ 包含在唯一的极大 AC_A 不变 π 子群 $\theta_\pi(C_G(b))$ 中, 这证明了 θ_π 是 G 上的可解 A 信号函子.

显然 $\pi(\theta_\pi) \subseteq \pi$, 再次从 $\theta_\pi(C_G(a))$ 的唯一性得到另一个性质. □

在下面引理的证明中, 用到了一个在其他情形下也有用的方法.

11.1.7 设 A 是使 $r(A) \geqslant 3$ 的作用在群 X 上的初等交换 p 群, 且设 $p \neq q \in \pi(X)$. 假设 Q_1 和 Q_2 是 X 的两个 A 不变 q 子群且使对 $D := Q_1 \cap Q_2$ 有

$$Q_1 \neq D \neq Q_2.$$

那么存在 $a \in A^{\#}$ 使

$$N_G(D) \cap C_{Q_i}(a) \nleqslant D, \quad i = 1, 2.$$

证明 因为 $Q_1 \neq D \neq Q_2$, 所以有

$$D < N_{Q_i}(D) =: N_i, \quad i \in \{1, 2\},$$

且 146 页 8.3.4 证明了 N_i 由子群 $C_{N_i}(B), B \leqslant A, r(A/b) \leqslant 1$ 生成. 特别地, 对 $i = 1, 2$, 存在的 A 极大子群 B_i 使

$$C_{N_i}(B_i) \nleqslant D.$$

因为 $r(A) \geqslant 3$ 所以得到 $B_1 \cap B_2 \neq 1$. 于是可取到 $1 \neq a \in B_1 \cap B_2$. □

第一个主要结果是

① 在此内容下注意到对 $\pi = \varnothing$, 1 是仅有的 π 子群.

② AC_A 不变的意思是 A 不变且 C_A 不变.

11.1.8　传递定理　设 θ 是 G 上的可解 A 信号函子且 $q \in \pi(\theta)$. 假设 $r(A) \geqslant 3$, 那么 $И^*_\theta(A,q)$ 中的元素在 C_A 下共轭.

证明　假定结论不成立. 在 $И^*_\theta(A,q)$ 的所有在 C_A 下不共轭的元素对中选取 Q_1 和 Q_2 使

$$D := Q_1 \cap Q_2$$

极大. 设

$$N := N_G(D), \quad N_a := N \cap C_a, \quad a \in A^\#.$$

由 11.1.7, 存在 $a \in A^\#$ 使

$$N_a \cap Q_1 \nleqslant D \text{ 且 } N_a \cap Q_2 \nleqslant D.$$

并且 N_a 是 A 不变 p' 群. 于是由 8.2.3(b) 和 (c) 知道存在元素 $c \in C_{N_a}(A)$ ($\leqslant C_A$) 使

$$E := \langle (N_a \cap Q_1)^c, N_a \cap Q_2 \rangle$$

是 N_a 的 A 不变 q 子群. 因为 D 和 E 都在 $И_\theta(A,q)$ 中, 所以由 11.1.2 也有 $DE \in И_\theta(A,q)$. 因此存在 $Q_3 \in И^*_\theta(A,q)$ 包含 DE, 所以有

$$D < D(N_a \cap Q_1)^c \leqslant {Q_1}^c \cap Q_3 \text{ 且 } D < D(N_a \cap Q_2) \leqslant Q_2 \cap Q_3.$$

D 的极大选择蕴含 ${Q_1}^c$ 和 Q_3 同 Q_2 和 Q_3 一样在 C_A 下共轭. 但此时 Q_1 和 Q_2 在 C_A 下也共轭, 得到矛盾. □

注意到传递定理的 2 个推论:

11.1.9　设 $q \in \pi(\theta)$ 且 $Q \in И^*_\theta(A,q)$. 假设 $r(A) \geqslant 3$. 那么下面成立:

(a) 对每一个 $H \in И_\theta(A)$, 存在 $c \in C_A$ 使 $Q^c \cap H$ 是 H 的 A 不变 Sylow q 子群.

(b) 对每一个 $1 \neq B \leqslant A$, $C_Q(B)$ 是 C_B 的 A 不变 Sylow q 子群.

证明　(a) H 的每一个 A 不变 Sylow q 子群 Q_1 都在 $И_\theta(A,q)$ 中, 从而包含在元素 $Q_2 \in И^*_\theta(A,q)$ 中. 由 11.1.8, 存在 $c \in C_A$ 使 $Q_2 = Q^c$, 从而 $Q^c \cap H = Q_1$.

(b) 因为 $C_A \leqslant C_B$, 所以由 (a) 可以得到结论 (使 $H := C_B$). □

11.1.10　如果 $|\pi(\theta)| \leqslant 1$ 且 $r(A) \geqslant 3$, 那么 θ 是完备的.

证明　在情形 $\pi(\theta) = \varnothing$ 时有 $\theta(G) = 1$. 假定 $\pi(\theta) = \{q\}$. 那么 $И_\theta(A) = И_\theta(A,q)$ 且存在 $Q \in И^*_\theta(A)$ 使 $C_A \leqslant Q$. 由 11.1.8 得 Q 是 $И^*_\theta(A,q)$ 中唯一的元素. □

以一个例子来结束本节, 这个例子证明了 Glauberman 完备定理中的假设 $r(A) \geqslant 3$ 是不能去掉的 (见 11.3.2).

设 q 是奇素数,V 是生成元为 v 和 w 的 q^2 阶初等交换群, 即

$$V = \langle v \rangle \times \langle w \rangle \cong C_q \times C_q^{①}.$$

设 $x, t, z \in \mathrm{Aut}\ V$ 通过以下关系定义:

$$(v^x, w^x) := (v, vw),$$
$$(v^t, w^t) := (v^{-1}, w),$$
$$(v^z, w^z) := (v^{-1}, w^{-1}).$$

设 U 是 Aut V 的由 x, t, z 生成的子群. 那么

$$[t, z] = [z, x] = 1 \text{且} x^t = x^{-1}.$$

设 H 是 U 和 V 的半直积. 把 U 和 V 与它们分别在 H 中对应的子群等同. 那么

$$G := V\langle x \rangle$$

是 q^3 阶的非交换正规子群, $A := \langle t, z \rangle$ 是 H 中 4 阶的初等交换子群, 并且满足

(′) $C_G(A) = 1$,

(″) $G = \langle x, w \rangle = \langle C_G(z), C_G(t) \rangle$,

(‴) $\langle v \rangle^A = \langle v \rangle \leqslant C_G(tz)$.

定义

$$\theta(C_G(t)) := C_G(t), \quad \theta(C_G(z)) := C_G(z), \quad \theta(C_G(tz)) := 1.$$

由 (′), θ 是 G 上的可解 A 信号函子.

假设 θ 在 G 上是完备的. 那么由 (″), G 是 $\mathcal{U}_\theta(A)$ 中的极大元. 但是此时有 $C_G(tz) = \theta(C_G(tz)) = 1$, 这和 (‴) 矛盾. 因此 θ 非完备.

11.2 分　解

同前面的章节中那样, A 是作用在群 G 上的非循环初等交换 p 群, θ 是 G 上的可解 A 信号函子.

在前面的章节中, 已经知道群的性质可以从它们的 p 局部子群的局部性质推导出.

在信号函子的情形下, 有类似的思路. 现在局部信息的携带者不是 p 局部子群而是 θ 局部子群:$\mathcal{U}_\theta(A)$ 的非平凡子群的正规化子.

---

① V 以加法形式是 $\mathbb{F}_q$ 上基为 v, w 的向量空间.

介绍下面的概念:

对 $q \in \pi(\theta)$, 设 $\theta_{q'} := \theta_{\pi(\theta)\setminus\{q\}}$, 其中, 右边的信号函子的定义同 11.1.6 中的. 如果

- 对所有非平凡的 $U \in И_\theta(A)$, $\theta_{N_G(U)}$ 是完备的且
- 对每一个 $q \in \pi(\theta)$, $\theta_{q'}$ 都是完备的.

那么 θ 称为在 G 上是**局部完备的**(locally complete).

实际上, 这个概念相当程度上是不必要的, 这是因为在下一节当 $r(A) \geqslant 3$ 时局部完备可解 A 信号函子是完备的. 但引进这个概念有两个原因: 第一是应该再次强调群论中局部性质的重要性. 第二是它能够被用来把一个很长的证明分为独立的中间结果.

本节研究 $\pi(\theta) \neq \{2,3\}$ 的情形, 特别是 $p=2$ 的情形. 证明在这种情形下每一个具有 $r(A) \geqslant 3$ 的局部完备可解 A 信号函子都是完备的.

11.2.1　设 G 是 p' 群, X 和 Y 是 G 的 A 不变子群. 假设

(1) 对所有的 $a \in A^\#$ 有 $C_G(a) = C_X(a)C_Y(a)$ 且

(2) X 是 $C_G(A)$ 不变的.

那么 $G = XY$.

证明　设 q 是 $|G|$ 的素因子 (当 $G=1$ 时没有什么可证明的). 首先假定 G 是非平凡 q 群, 所以 $Z(G) \neq 1$. 因为 A 非循环, 所以存在 $a \in A^\#$ 使

$$N := C_{Z(G)}(a) \neq 1.$$

显然 N 是 A 不变的且 $\overline{G} := G/N$(关于 $\overline{X}$, $\overline{Y}$) 满足假设. 在 $|G|$ 上用归纳法, 可假定 $\overline{G} = \overline{XY}$, 所以有

$$G = XYN = XNY = XC_G(a)Y \overset{(1)}{=} XY.$$

现在从刚才证明的情形来推导出一般情形.

设 $a \in A^\#$. 根据 (cp), 运用到 $C_Y(a)$, Y 和 G 上得到存在 G 的 A 不变 Sylow q 子群 Q 使

$$Q \cap Y \in \mathrm{Syl}_q\, Y \text{ 且 } Q \cap C_Y(a) \in \mathrm{Syl}_q\, C_Y(a).$$

并且因为 X, $C_X(a)$ 和 $C_G(A)$ 是 $C_G(A)$ 不变的, 所以从 141 页 8.2.5 得到

$$X \cap Q \in \mathrm{Syl}_q\, X,\ C_X(a) \cap Q \in \mathrm{Syl}_q\, C_X(a) \text{ 且 } C_Q(a) \in \mathrm{Syl}_q\, C_G(a).$$

因为 $X \cap Y$ 和 $C_{X\cap Y}(a)$ 都是 $C_Y(A)$ 不变的, 由相同的论证得到也有

$$X \cap Y \cap Q \in \mathrm{Syl}_q\, X \cap Y \text{ 且 } C_{X\cap Y}(a) \cap Q \in \mathrm{Syl}_q\, C_{X\cap Y}(a).$$

于是有

$$|C_Q(a)| = |C_G(a)|_q \overset{(1)}{=} |C_X(a)C_Y(a)|_q = |C_X(a)|_q|C_Y(a)|_q|C_{X\cap Y}(a)|_q^{-1}$$
$$= |C_X(a)\cap Q||C_Y(a)\cap Q||C_{X\cap Y}(a)\cap Q|^{-1} = |C_{X\cap Q}(a)C_{Y\cap Q}(a)|,$$

从而 $C_Q(a) = C_{X\cap Q}(a)C_{Y\cap Q}(a)$. 因为 $Q\cap X$ 也是 $C_Q(A)$ 不变的, 所以由上面证明的情形得 $Q = (Q\cap X)(Q\cap Y)$. 由此得到

$$|Q| = |Q\cap X||Q\cap Y||X\cap Y\cap Q|^{-1} = |X|_q|Y|_q|X\cap Y|_q^{-1} = |XY|_q.$$

因此对每一个 $q\in\pi(G)$ 都有 $|Q|$ 整除 $|XY|$, 从而 $G = XY$. □

下面选取的符号同 11.1 节. 特别地, 有

$$C_a := \theta(C_G(a)),\ a\in A^{\#} \text{ 和 } C_B := \theta(C_G(B)),\ 1\neq B\leqslant A.$$

11.2.2 设 θ 在 G 上是局部完备的且 $M\in \mathcal{U}_\theta^*(A)$. 假设 $|\pi(\theta)| = 2$ 且存在 A 不变子群 $F\leqslant F(M)$ 使

$$\text{对每一个 } q\in\pi(\theta) \text{ 有 } O_q(F)\neq 1.$$

那么 M 是 $\mathcal{U}_\theta^*(A)$ 中包含 F 的唯一元素.

证明 设 $\pi(\theta) = \{q, r\}$. 用导出矛盾的方法来证明. 设 (F, M) 是使 F 极大的反例,

$$F_q := O_q(F),\ F_r := O_r(F) \text{ 和 } N_q := N_G(F_q).$$

注意到因为 $F_{q'}\in \mathcal{U}_\theta(A)$ 而有 θ_{N_q} 是完备的. 首先证明

(′) M 是 $\mathcal{U}_\theta^*(A)$ 中唯一包含 $\theta(N_q)$ 的元素, 其中, $q\in\pi(\theta)$.

设

$$\theta(N_q)\leqslant L\in \mathcal{U}_\theta^*(A).$$

首先假定 $F_q = O_q(M)$. 那么 $M\leqslant\theta(N_q)$, 由 M 的极大性得 $\theta(N) = M = L$.

现在假设 $F_q < O_q(M)$ 且设

$$\widetilde{F} := N_{O_q(M)}(F_q)\times O_r(M).$$

那么 $\widetilde{F}$ 是 A 不变的且 $F<\widetilde{F}$. 因此 $(\widetilde{F}, M)$ 满足条件假设但不是反例. 于是在此情形下也有 $M = L$, 从而 (′) 得证.

现在设 $F\leqslant H\in \mathcal{U}_\theta^*(A)$, 则有

$$N_H(F_q)\leqslant\theta(N_q)\overset{(')}{\leqslant} M.$$

由此得到 $F_r\leqslant O_{q'}(N_H(F_q))$, 从而 144 页 8.2.13 蕴含 $F_r\leqslant O_{q'}(H) = O_r(H)$.

把 r 和 s 的角色对换由相同的论证也得到 $F_q \leqslant O_{r'}(H) = O_q(H)$. 于是 $F \leqslant F(H)$, 群对 (F, H) 满足假设条件. 于是或者 (F, H) 也适用 $(')$ 或者 (F, H) 不是反例. 在两种情形, 因为 $F \leqslant \theta(N_q)$ 都有 $\theta(N_q) \leqslant H$. 因此 $(')$ 表明了 $H = M$. 但此时得到 (F, M) 不是反例. □

下面的评注描述了在下一个证明中要遇到的情形.

11.2.3 设 G 是 p' 群. 假设

$$\text{对所有的 } a \in A^{\#}, \text{ 有 } \theta(C_G(a)) = C_G(a).$$

那么下面成立:

(a) $\mathcal{U}_\theta(A)$ 是 G 的所有 A 不变可解子群的集合. 特别地, 每一个 A 不变子群都在 $\mathcal{U}_\theta(A)$ 中.

(b) θ 是完备的当且仅当 $G = \theta(G)$.

(c) 设 θ 在 G 上是局部完备的. 那么

$$1 \neq U \in \mathcal{U}_\theta(A) \Rightarrow N_G(U) \in \mathcal{U}_\theta(A).$$ □

下面考虑 G 的一个分解:

$$G = KQ, \ K, Q \in \mathcal{U}_\theta(A).$$

那么 G 是 p' 群且对所有的 $a \in A^{\#}$ 有

$$C_G(a) \overset{8.2.11}{=\!=\!=} C_K(a)C_Q(a) = \theta(C_G(a)).$$

于是处于 11.2.3 的情形下.

11.2.4 设 θ 在 G 上是局部完备但不是完备的, $q \in \pi(\theta)$ 且

$$G = KQ, \text{ 其中, } K \in \mathcal{U}_\theta(A, q') \text{ 且 } Q \in \mathcal{U}_\theta(A, q).$$

(a) Q 不正规化 G 的任何非平凡 q' 子群.

(b) 对所有的 $Q \leqslant U \in \mathcal{U}_\theta(A)$ 有 $F(U) \leqslant Q$.

(c) 设 Q 是交换群. 那么对所有的 $Q \leqslant U \in \mathcal{U}_\theta(A)$ 有 $U \leqslant N_G(Q)$.

证明 注意到 $Q \in \mathrm{Syl}_q\, G$ 和对 $r \in \pi(K)$ 有 $\mathrm{Syl}_r\, K \subseteq \mathrm{Syl}_r\, G$, 并且$G = KQ$ 表明了

(1) 对 $r \in \pi(G) \backslash \{q\}$ 有 $\mathrm{Syl}_r\, G = \bigcup_{g \in Q} \mathrm{Syl}_r\, K^g$.

因为 θ 是局部完备但不是完备的, 所以 $\mathcal{U}_\theta(A)$ 不包含 G 的没有非平凡正规子群. 特别地,

(2) $\bigcap_{g \in G} K^g = \bigcap_{g \in Q} K^g = 1$.

设 X 是被 Q 正规化的 p' 子群. 根据 (cp), 对每个 $r \in \pi(X)$, X 中都存在 Q 不

变的 Sylow r 子群. 于是为了证明 (a), 可假设 X 自身是一个 r 群. 那么 (1) 蕴含 $X \leqslant K$, 所以由 (2) 得

$$X \leqslant \bigcap_{g \in Q} K^g = 1.$$

因为 $Q \in \mathrm{Syl}_q G$, 所以论断 (b) 是 (a) 的直接结果.

对于 (c) 的证明, 因 Q 是交换群, 从 95 页 6.1.4 得到

$$F(U) \overset{(b)}{\leqslant} Q \leqslant C_U(F(U)) \leqslant F(U),$$

从而 $Q = F(U)$. □

11.2.5 设 θ 在 G 上是局部完备的, $q \in \pi(\theta)$ 且 $Q \in \mathcal{U}_\theta(A,q)$. 假设 Q 是交换群, $r(A) \geqslant 3$ 且有

$$G = KQ, \quad K := \theta_{q'}(G).$$

那么 θ 是完备的且 $\theta(G) = G$.

证明 注意 11.2.3 后的评注表明 G 是使

$$对\ a \in A^\#,\ 1 \neq B \leqslant A, 有\ C_a = C_G(a)\ 且\ C_B = C_G(B),$$

的 p' 群. 特别地, 可应用 11.2.3 到 G 上. 因此 $\mathcal{U}_\theta(A)$ 是 G 的 A 不变可解子群的集合且 θ 是完备的当且仅当 G 可解.

于是可假定 G 非可解, 并且因为 θ 是局部完备的而有 A 不变可解子群的正规化子也可解, 即

(1) $U \in \mathcal{U}_\theta(A) \Rightarrow N_H(U) \in \mathcal{U}_\theta(A)$.

Burnside $\{p^a q^b\}$ 定理证明了 $|\pi(G)| \geqslant 3$, 所以 $|\pi(K)| \geqslant 2$. 因此, 因 K 是可解的而存在 $r, r_0 \in \pi(K)$ 使

$$1 \neq O_{r_0}(K) \leqslant O_{r'}(K).$$

固定下面的记号:

$$Q_a := Q \cap C_a,\ a \in A^\#, \quad Q_B := Q \cap C_B,\ 1 \neq B \leqslant A,$$

$$L := N_G(Q)\ 和\ K_0 := O_{r_0}(K).$$

假设 $Q \leqslant \theta_{r'}(G)$. 那么由 11.2.4(c) 得到 $\theta_{r'}(G) \leqslant L$. 特别地, $1 \neq O_{r'}(K) \leqslant L$. 由 G 的分解得

$$O_{r'}(K) \leqslant \bigcap_{g \in K} L^g = \bigcap_{g \in G} L^g =: D.$$

因此 D 是 G 的在 $\mathcal{U}_\theta(A)$ 中的非平凡正规子群. 那么由 (1) 知 G 可解, 得到矛盾. 于是证明了

(2) $Q \not\leqslant \theta_{r'}(G)$.

设 Q^* 是 Q 的一个非平凡 A 不变子群. 那么由 (1) 得

$$N_G(Q^*) \in \mathcal{U}_\theta(A)$$

且因 Q 是交换群得 $Q \leqslant N_G(Q^*)$. 因此 11.2.4(c) 蕴含

(3) $N_G(Q^*) \leqslant L$ 且特别有 $N_G(Q^*)$ 是 q 闭的.

现在设 U 是 G 的使 $U \cap Q \neq 1$ 的 A 不变子群. 那么由 (3) 证得 $N_U(Q \cap U) \leqslant L$ 且 $U \cap Q \in \mathrm{Syl}_q\, U$. 于是有

(4) 设 U 是使 $U \cap Q \neq 1$ 的 A 不变子群. 那么 $U \cap Q \in \mathrm{Syl}_q\, U$.

设 B 是 A 的非平凡子群. 由 11.1.9, 因为 $C_A \leqslant C_B$ 而得到 $Q_B \in \mathrm{Syl}_q C_B$. 因此, 因 C_B 是可解的且 Q_B 是交换群而有

$$C_B = O_{q'}(C_B) N_{C_B}(Q_B).$$

于是 (3) 蕴含

(5) 对所有的 $1 \neq B \leqslant A$ 有 $C_B = O_{q'}(C_B)(C_B \cap L)$.

设

$$\mathcal{B} := \{B \leqslant A \,|\, |A/B| = p \text{ 且 } Q_B \neq 1\}.$$

下面设 $B \in \mathcal{B}$. 下一步证明

(6) 设 $T \in \mathrm{Syl}_r\, O_{q'}(C_A)$, 那么 $T \not\leqslant L$.

假定 $T \leqslant L$. 根据 141 页 8.2.6, C_B 中存在包含 Q_B 的 A 不变 Hall r' 子群. 并且C_B 的 A 不变 Hall r' 子群在 C_A 下共轭, 所以 $H \cap O_{q'}(C_A)$ 是 $O_{q'}(C_A)$ 的 Hall r' 子群, 从而

$$O_{q'}(C_A) = T(H \cap O_{q'}(C_A)).$$

这和 (5) 一起得到

$$C_A = (H \cap O_{q'}(C_A))(C_A \cap L).$$

因为 $C_A \cap L$ 正规化 Q_B, 所以得到

$$X := \langle {Q_B}^{C_A} \rangle \leqslant \langle {Q_B}^H \rangle \leqslant H.$$

特别有 X 是 C_B 的 AC_A 不变 r' 子群, 所以

$$\text{对所有的 } B \in \mathcal{B} \text{ 有 } Q_B \leqslant \theta_{r'}(G).$$

但现在因 A 非循环而由 146 页 8.3.4 得 $Q \leqslant \theta_{r'}(G)$. 这和 (2) 矛盾, 从而证明了 (6).

(7) 设 $B \in \mathcal{B}$ 且 V 是 $O_{q'}(C_B)$ 的 A 不变 Sylow r 子群, 那么 $[V, Q_B] \neq 1$.

假设 $[V, Q_B] = 1$. 那么 (3) 蕴含 $V \leqslant C_B \cap L$. 另一方面, 再次由 141 页 8.2.6 得 $V \cap C_A$ 是 $O_{q'}(C_A)$ 的 A 不变 Sylow r 子群. 这和 (6) 矛盾.

现在设

$$K_B := \bigcap_{x \in Q_B} K^x.$$

因为对 $a \in B^{\#}$ 有 $O_{q'}(C_B)O_{q'}(C_a) \leqslant K$ 且 $Q_B \leqslant C_a$, 所以得到

(8) 对 $a \in B^{\#}$ 有 $O_{q'}(C_B)O_{q'}(C_a) \leqslant K_B$.

下面证明:

(9) $O_{r'}(K) \leqslant K_B$.

设 V 是 $O_{q'}(C_B)$ 的 AQ_B 不变 Sylow r 子群且

$$W := [V, Q_B],\ X := O_{r'}(K).$$

由 (8) 得 W 正规化 X, 所以由 8.2.7 和 8.3.4 得到

(+) $X = C_X(W)[X, W],\ C_X(W) = \langle C_X(W) \cap C_a | a \in B^{\#} \rangle$

且

(++) $[X, W] = \langle [C_X(a), W] | a \in B^{\#} \rangle$.

设 $a \in B^{\#}$. 由 (5) 和 (8) 得到

$$W \leqslant O_{q'}(C_a) \leqslant K_B.$$

于是也有

$$[C_a, W] \leqslant O_{q'}(C_a) \leqslant K_B,$$

从而 (++) 蕴含了

$$[X, W] \leqslant K_B.$$

因此由 (+) 和 (8) 知道只需证明

$$C_X(W) \cap C_a \leqslant O_{q'}(C_a).$$

设

$$S := C_G(W) \cap C_a.$$

那么 S 和 SQ_B 是 AQ_B 不变的, 所以由 (4) 得 $S \cap Q_a \in \mathrm{Syl}_q\, S$. 如果 $S \cap Q_a \neq 1$, 那么由 (3) 得 $W \leqslant L$ 从而 $[W, Q_B] = 1$. 但这和 (7) 矛盾. 因此 S 是 q' 群, 从而有

$$[S, Q_B] \overset{\text{(cp)}}{=} [S, Q_B, Q_B] \overset{(5)}{\leqslant} O_{q'}(C_a) \overset{(8)}{\leqslant} K_B.$$

但此时 $(S\cap X)[S,Q_B]$ 是 K 的 Q_B 不变子群, 从而在 K_B 中. 由此得到 $S\cap X = C_X(W)\cap C_a \leqslant K_B$, 从而 (9) 得证.

注意到有 $1\neq K_0 = O_{r_0}(K)\leqslant O_{r'}(K)$. 因此由 (9) 得到

$$K_0\leqslant K_B \text{ 从而 } K_0\leqslant O_{r_0}(K_B).$$

由此得到 $\langle K_0{}^{Q_B}\rangle$ 是 G 的 AQ_B 不变 r_0 子群.

在 G 的所有包含 K_0 且由 K_0 的共轭生成的 AQ_B 不变 r_0 子群中, 选取 R 为极大的. 那么 R 是 A 不变的可解子群, 所以由 (1) 得

$$M := N_G(R)\in \mathcal{U}_\theta(A).$$

设 $Q_0 := M\cap Q$. 因为 $1\neq Q_B\leqslant M$, 所以由 (4) 得 $Q_0\in \mathrm{Syl}_q M$. 对每一个 $g\in G$ 都存在 $x\in k, y\in Q$ 使 $g = xy$. 因此, 因 $K_0\trianglelefteq K$ 且 Q 是交换群得到

$$\langle K_0{}^{gQ_0}\rangle = \langle K_0{}^{yQ_0}\rangle = \langle K_0{}^{Q_0}\rangle^y.$$

特别地,

$$\text{对每一个 } g\in G \text{ 都有 } \langle K_0{}^{gQ_0}\rangle \text{ 是 } r_0 \text{ 群}.$$

设 $g\in G$ 使 $K_1 := K_0^g\leqslant M$. 那么, 用 (M, K_1, Q_0) 替换 Matsuyama 引理 (见 123 页 6.7.8) 中的 (G,Z,Y) 得到 M 有 Sylow r_0 子群 T_1 使 $K_1\leqslant T_1$ 且

$$R_1 := \mathrm{wcl}_M(K_1, T_1)$$

被 Q_0 正规化. 于是由 6.4.4 证得

$$R_1\leqslant N := O_{q'}(M).$$

已证明了 $\mathrm{wcl}_G(K_0, M)\leqslant N$. 由 AQ_B 在 N 上的互素作用得到有 A 不变的 Sylow r_0 子群 T 使

$$R\leqslant T\cap N \text{ 且 } (T\cap N)^{Q_B} = T\cap N.$$

R 的极大选择蕴含

$$R = \mathrm{wcl}_G(K_0, T\cap N) = \mathrm{wcl}_G(K_0, T).$$

由此得到 $N_G(T)\leqslant N_G(R) = M$, $T\in \mathrm{Syl}_{r_0}G$. 证明了

(10) 对每一个 $B\in \mathcal{B}$, 存在 A 不变的 $T\in \mathrm{Syl}_{r_0}G$ 使 $K_0\leqslant T$ 且 $\mathrm{wcl}_G(K_0,T)$ 在 AQ_B 下是不变的.

现在导出最后的矛盾, 设 B 和 T 同 (10) 中所定义, 并且同上面有

$$R := \mathrm{wcl}_G(K_0, T),\ M := N_G(R),\ 和\ Q_0 := Q \cap M \in \mathrm{Syl}_q M.$$

那么 $1 \neq R \leqslant O_{r_0}(M)$, 从而由 11.2.4 得到 $Q \nleqslant M$. 因为

$$Q = \prod_{B_1 \in \mathcal{B}} Q_{B_1},$$

所以存在 $B_1 \in \mathcal{B}$ 使

$$Q_1 := Q_{B_1} \nleqslant M.$$

现在用 B_1 替代 B 运用 (10), 那么 G 中存在 A 不变的 Sylow r_0 子群 T_1, 使

$$R_1 := \mathrm{wcl}_G(K_0, T_1)$$

是 AQ_1 不变的. 根据 A 在 G 和 M 上的互素作用, 存在 $c \in C_A$ 使 $T_1^c = T$. 所以 ${R_1}^c = R$ 且 ${Q_1}^c \leqslant M$, 存在 $c' \in C_A \cap M$ 使

$$Q_1^{cc'} \leqslant Q_0.$$

由此得到

$$Q_1^{cc'} \leqslant C_{Q_0}(B_1) \leqslant Q_1$$

从而 $Q_1 = Q_1^{cc'} \leqslant M$. 这和 $B_1 \in \mathcal{B}$ 的选择矛盾. □

下面证明 3.2.9 的另一个适合本节情形的版本.

11.2.6　设 θ 在 G 上是局部完备的且 $q \in \pi(\theta)$. 设 $L, M \in \mathcal{U}_\theta(A)$ 和 $W \in \mathcal{U}_\theta(A, q)$, 且 $U := \theta(N_G(W))$. 假设 $W \leqslant M$,

$$M = O_{q'}(M)(L \cap M)\ 且\ U = O_{q'}(U)(U \cap M).$$

那么存在 $c_1 \in C_A \cap M$ 使

$$U = O_{q'}(U)(U \cap L^{c_1}).$$

证明　分解 $M = O_{q'}(M)(L \cap M)$ 和 (cp) 蕴含 $L \cap M$ 包含 M 的一个 A 不变 Sylow q 子群. 因此存在 $c_1 \in C_A \cap M$ 使

$$W \leqslant (L \cap M)^{c_1} = L^{c_1} \cap M\ 且\ M = O_{q'}(M)(L^{c_1} \cap M).$$

用

$$(M, q, O_{q'}(M), L^{c_1} \cap M, W)\ 代替\ (G, p, N, H, P).$$

那么 53 页 3.2.9 证明了

$$U \cap M = (U \cap O_{q'}(M))(U \cap (L^{c_1} \cap M))$$

从而

$$U = O_{q'}(U)(U \cap O_{q'}(M))(U \cap (L^{c_1} \cap M)).$$

因为第 3 个因子正规化第 2 个, 所以第 2 个因子包含在 $O_{q'}(U)$ 中. 于是得到结论. □

11.2.7　设 θ 在 G 上是局部完备的, $r(A) \geqslant 3$ 且 $q \in \pi(\theta)$. 假设存在 $M \in \mathcal{U}_\theta(A)$ 满足

(*) 对每一个 $W \in \mathcal{U}_\theta(A,q)$, $W \neq 1$, 都存在 $c \in C_A$ 使

$$\theta(N_G(W)) = O_{q'}(\theta(N_G(W)))(N_G(W) \cap M^c).$$

那么 θ 在 G 上是完备的.

证明　设 Q_0 是 $O_{qq'}(M)$ 的 A 不变 Sylow q 子群. 因为 $q \in \pi(\theta)$ 所以存在 $1 \neq W \in \mathcal{U}_\theta(A,q)$. 因此 (*) 蕴含 $q \in \pi(M)$, 从而因为 M 可解而有 $Q_0 \neq 1$.

固定下面的记号:

$$Q := Z(Q_0),\ L := \theta(N_G(Q)) \text{ 和 } K := \theta_{q'}(G).$$

由 Frattini 论断和 8.2.11 得到

(1) 对 $a \in A^\#$ 有 $M = O_{q'}(M)(M \cap L)$ 且 $M \cap C_a = (O_{q'}(M) \cap C_a)(M \cap L \cap C_a)$.

现在证明

(2) 对 $a \in A^\#$ 有 $C_a = O_{q'}(C_a)(C_a \cap L)$.

设 W_a 是 $O_{q'q}(C_a)$ 的 A 不变 Sylow q 子群. 如果 $W_a = 1$, 那么 (2) 成立. 于是可假定 $W_a \neq 1$. 设 $U := \theta(N_G(W_a))$. 那么有

$$C_a = O_{q'}(C_a)(U \cap C_a)$$

且由 (*) 得

$$\text{对某个 } c \in C_A \text{ 有 } U = O_{q'}(U)(U \cap M^c).$$

特别有 $W_a \leqslant O_q(U) \leqslant M^c$. 运用 11.2.6 到

$$M^c \overset{(1)}{=} O_{q'}(M^c)(M^c \cap L^c).$$

那么存在 $c_1 \in C_A \cap M^c$ 使

$$U = O_{q'}(U)(U \cap L^{cc_1}).$$

因此

$$C_a = O_{q'}(C_a)(U \cap C_a) \overset{8.2.11}{=} O_{q'}(C_a)(O_{q'}(U) \cap C_a)(U \cap L^{cc_1} \cap C_a)$$
$$= O_{q'}(C_a)(C_a \cap L^{cc_1}).$$

因 $cc_1 \in C_A$ 这蕴含了 (2).

同 11.2.5 中那样, 设

$$\mathcal{B} = \{B \leqslant A \mid |A/B| = p \text{ 且 } Q_B \neq 1\}$$

且选取 $B \in \mathcal{B}$. 设

$$Q_B := C_Q(B) \text{ 且 } K_B := \langle O_{q'}(C_a) \mid a \in B^{\#} \rangle.$$

注意到 $K_B \leqslant K$ 且 K_B 是 AC_A 不变的. 因此 (2) 蕴含

(3) 对所有的 $a \in B^{\#}$ 有 $C_a = (C_a \cap K_B)(C_a \cap L)$ 且 $C_a \cap K = (C_a \cap K_B)(K \cap L \cap C_a)$.

因为 $C_K(a) = K \cap C_a$ 且 K_B 是 $C_K(A)$ 不变的, 从 11.2.1 得到

(4) 对 $B \in \mathcal{B}$ 有 $K = K_B(K \cap L)$.

因为 Q_B 正规化 K_B, 所以由此得到

$$Q_B K = Q_B K_B(L \cap K) = K_B Q_B (L \cap K) \subseteq K_B Q (L \cap K) = K_B (L \cap K) Q \overset{(4)}{=} KQ$$

从而

$$QK = \prod_{B \in \mathcal{B}} Q_B K \subseteq KQ.$$

由此得到

$$G_0 := KQ = QK$$

是 G 的 A 不变 p' 子群. 于是运用 11.2.5 到 G_0 得到

(5) θ_{G_0} 是完备的且 $\theta(G_0) = G_0$.

设 $G_1 := [Q, G_0]Q$, 因 Q 是交换群而有 $G_1 := [Q, K]Q$. 因为 $[Q, K \cap L] \leqslant Q$, 对 $B \in \mathcal{B}$ 有

$$[K, Q] = [Q, K] \overset{(4)}{=} [Q, (K \cap L)K_B] \overset{1.5.4}{\leqslant} [Q, K_B]Q.$$

于是有

(6) 对所有的 $B \in \mathcal{B}$ 有 $G_1 = [Q, K_B]Q$.

注意到 $C_L(B)$ 正规化 K_B 从而由 (6) 得也正规化 G_1. 因为 $L = \langle C_L(B) \mid B \in \mathcal{B} \rangle$, 得到 $L \leqslant N_G(G_1)$. 另一方面, G_1 是 $G_0 \in \mathcal{U}_\theta(A)$ 的 A 不变正规子群. 所以

$$G_1 \in \mathcal{U}_\theta(A) \text{ 且 } \langle K, L \rangle \leqslant N_G(G_1).$$

由 θ 的局部完备性得

$$\langle K, L\rangle \in \theta(N_G(G_1)),$$

同 (2) 一起得到

$$E := \langle C_a | a \in A^{\#}\rangle \leqslant \langle K, L\rangle \in И_\theta(A).$$

因此 θ 是完备的. □

11.2.8 假设 θ 在 G 上是局部完备的, $r(A) \geqslant 3$ 且 $\pi(\theta) \neq \{2,3\}$. 那么 θ 在 G 上完备.

证明 对于 $|\pi(\theta)| \leqslant 1$, 从 11.1.10 得到结论. 因此可假定存在 $q \in \pi(\theta)$ 使

$$q \geqslant 5 \text{ 且 } И_\theta(A, q) \neq \{1\}.$$

设 $S \in И^*_\theta(A, q)$ 且 $Q := W(S)$, 其中, $W(S)$ 是在 9.4 节中定义的 S 的非平凡特征子群. 设

$$M := \theta(N_G(W(S))).$$

如果能够证明

(*) 对每一个 $W \in И_\theta(A, q)$, $W \neq 1$ 都存在 $c \in C_A$ 使

$$\theta(N_G(W)) = O_{q'}(\theta(N_G(W)))(N_G(W) \cap M^c).$$

那么从 11.2.7 得到 θ 的完备性. 现在证明 (*), 设 $W \in И_\theta(A, q)$ 是反例,

$$U := \theta(N_G(W)) \text{ 且 } T \in \mathrm{Syl}_q U \text{ 使 } T^A = T.$$

另外, 选取反例 W 使 $|T|$ 是极大的. 那么 $T \neq 1$ 且 $T \in И_\theta(A, q)$. 因此, 因为 θ 是局部完备的而有

$$L := \theta(N_G(W(T)))$$

的存在. 取 $S^* \in И^*_\theta(A, q)$ 使 $T \leqslant S^*$. 从 9.4.6 得到

(1) $U = O_{q'}(U)(U \cap L)$.

首先假定 $T = S^*$. 根据传递定理, 存在 $c \in C_A$ 使 $S^c = T$. 因此 $M^c = L$(见 9.4.1), 从而由 (1) 知 W 不是反例.

现在假定 $T < S^*$, 那么

$$T < N_{S^*}(W(T)) \leqslant M.$$

用 $W(T)$ 替换 W, 由 T 的极大性选择得性质 (*), 所以

$$\text{对某个 } c \in C_A \text{ 有 } L = O_{q'}(L)(L \cap M^c).$$

因此 11.2.6(用 (L, M^c) 取代 (M, L)) 蕴含

$$U = O_{q'}(L)(L \cap M^{cc_1}),\ c_1 \in C_A,$$

从而 W 不是反例. 这个最后的矛盾证明了 $(*)$. □

完备定理的一个重要的特殊情形, 即 Goldschmidt 定理[55] 是 11.2.8 的结论.

11.2.9 设 $p = 2$ 且 θ 是 G 上使 $r(A) \geqslant 3$ 的可解 A 信号函子. 那么 θ 在 G 上完备.

证明 设 (G, A, θ) 是使 $|G| + |\pi(\theta)|$ 极小的反例.

假定 N 是 G 的包含在 $\mathcal{U}_\theta(A)$ 中的非平凡正规子群. 那么 $\overline{\theta}$, 同 11.1.3 中定义的那样, 是 $\overline{G} := G/N$ 上的可解 A 信号函子, 从而由 $|G| + |\pi(\theta)|$ 的极小性得到 $\overline{\theta}$ 是完备的. 但现在由 11.1.4 得 θ 也是完备的, 得到矛盾.

因此, G 没有包含在 $\mathcal{U}_\theta(A)$ 中的非平凡正规子群. 特别对 $1 \neq U \in \mathcal{U}_\theta(A)$ 有 $N_G(U) < G$. 于是再次由 $|G| + |\pi(\theta)|$ 的极小性得 θ 在 G 上是局部完备的. 从而由 11.2.8 证明了 θ 也是完备的, 矛盾. □

11.3 Glauberman 完备定理

同前面那样, A 是作用在群 G 上的非循环初等交换 p 群. 符号的选择同 11.1 节和 11.2 节中一样.

将需要下面的评注:

11.3.1 设 G 是可解 p' 群且 $q \in \pi(G)$. 假设 U 是 G 的使对 A 的每一个极大子群 B 都有 $[U, C_G(B)]$ 是 q' 群的 q' 子群. 那么 $U \leqslant O_{q'}(G)$.

证明 可假定 $O_{q'}(G) = 1$ 并证明 $U = 1$. 设 $Q := O_q(G)$. 那么

$$Q \overset{(\mathrm{cp})}{=} \langle C_Q(B) | B \leqslant A, |A/B| = p \rangle,$$

又因为 $[U, C_Q(B)] \leqslant Q$ 所以 $[Q, U] = 1$. 由此得到

$$U \leqslant C_G(Q) \overset{6.4.3}{\leqslant} Q,$$

从而 $U = 1$. □

11.3.2 Glauberman 完备定理 设 θ 是 G 上的可解 A 信号函子. 假设 $r(A) \geqslant 3$, 那么 θ 完备.

证明 对 $|G| + |\pi(\theta)|$ 用归纳法证明. 设 (G, A, θ) 是使 $|G| + |\pi(\theta)|$ 极小的反例. 如同 11.2.9 中的证明

(1) θ 是局部完备的.

于是 11.2.8 蕴含

(2) $\pi(\theta)=\{2,3\}$.

下面设 q 和 r 是 $\pi(\theta)$ 中的两个素数, 则有

$$\pi(\theta)=\{q,r\}=\{2,3\}.$$

设

$$И:=И_\theta(A),\ И^*:=И^*_\theta(A),\ И_s:=И_\theta(A,s),\ И^*_s:=И^*_\theta(A,s)\ (s\in\pi(\theta)).$$

传递定理 11.1.8 给出

$$\text{对 } S\in И^*_q \text{ 和 } R\in И^*_r \text{ 有 } И^*_q=S^{C_A} \text{ 且 } И^*_r=R^{C_A},$$

这些结论将经常用到的.

首先证明

(3) 设 $S\in И^*_q$, 那么 S 包含在 $И^*$ 的唯一的一个元素中.

证明 因为 $q\in\pi(\theta)$ 显然有 $S\neq 1$. 设

$$S\leqslant M_1\cap M_2,\ M_1,M_2\in И^*.$$

证明 $M_1=M_2$. 对 $i=1,2$, M_i 中存在 A 不变的 Sylow r 子群 R_i, 使 $M_i=SR_i$. 设 $R_i\leqslant\widehat{R}_i\in И^*_r$ 和 $c\in C_A$ 使 $\widehat{R}_1^c=\widehat{R}_2$. 从 11.1.9 得到 $C_A\cap\widehat{R}_i\in \mathrm{Syl}_r C_A$ 且 $C_A\cap S\in\mathrm{Syl}_q C_A$, 所以 $C_A=(\widehat{R}_i\cap C_A)(S\cap C_A)$. 因此可选取 $c\in S\cap C_A$. 由此得到

$$R_1{}^cS=(R_1S)^c=(SR_1)^c=SR_1{}^c.$$

于是

$$M^*:=S\langle R_1{}^c,R_2\rangle$$

是 A 不变子群且 $\langle R_1{}^c,R_2\rangle\leqslant\widehat{R}_2$, 特别有 $\langle R_1{}^c,R_2\rangle\in И$. 由 p^aq^b 定理证得 M^* 可解. 因此由 11.1.2 得 $M^*\in И$. 因为

$$c\in S\leqslant M_2\leqslant M^*,$$

M_1 和 M_2 的极大性蕴含了

$$M_2=M^*=M_1{}^c=M_1.$$

□

(4) 设 $S\in И^*_q$ 且 $S\leqslant M\in И^*$. 那么 S 包含使下面成立的 A 不变子群 $Q\neq 1$:

(4a) $\theta(N_G(Q))$(关于 q) 不是 Thompson 可分解的.

(4b) $\theta(N_G(Q)) \cap C_A \not\leqslant M$ 且特别有 $C_A \not\leqslant M$.

证明 首先注意到 11.2.7 和 $S^{C_A} = \text{И}_q^*$ 证明了 S 包含一个 A 不变子群 $Q \neq 1$ 使 [illegible]

$$U := \theta(N_G(Q)) \neq O_{q'}(U) \quad (U \cap M).$$

另外, 还选取 Q 使 $|U \cap M|_q$ 极大. 设 T 是 $U \cap M$ 的 A 不变 Sylow q 子群. 在 M 中取共轭之后, 可假定 $T \leqslant S$. 由 (3) 得 $T < S$ 从而

$$T < N_S(T) \leqslant N_G(J(T)).$$

Q 的选择蕴含

$$U_1 := \theta(N_G(J(T))) = O_{q'}(U_1)(U_1 \cap M).$$

另一方面, $Q \leqslant T$ 从而 $\Omega(Z(S)) \leqslant \Omega(Z(T)) \leqslant J(T)$, 所以再次由 (3) 得到

$$O_{q'}(U_1) \leqslant \theta(C_G(\Omega(Z(T)))) \leqslant \theta(C_G(\Omega(Z(S)))) \leqslant M.$$

因此得到 $U_1 \leqslant M$. 已证明了

(*) $E := \langle \theta(C_G(\Omega(Z(T)))), \theta(N_G(J(T))) \rangle \leqslant M$.

特别地, $\theta(N_G(T)) \leqslant M$. 从而

$$T \in \mathrm{Syl}_q\, U.$$

如果 U 是 Thompson 可分解的, 那么有

$$U = O_{q'}(U) N_U(J(T)) C_U(\Omega(Z(T))) = O_{q'}(U)(U \cap M),$$

这和 U 的选择矛盾. 因此 U 具有性质 (4a). 于是由 188 页 9.3.10(a) 和 (cp) 有

$$U = O_{q'}(U)\langle E \cap U, C_U(A) \rangle \overset{(*)}{=} O_{q'}(U)\langle M \cap U, C_U(A) \rangle.$$

由此得到 $C_U(A) = C_A \cap U \not\leqslant M$, 这就是 (4b). □

(5) C_A 中存在 9 阶和 8 阶的初等交换子群.

证明 设 $U := \theta(N_G(Q))$ 同 (4) 中那样. 运用 9.3.10(b) 到 $U/O_{q'}(U)$ 上. 由 (cp), 存在子群 $W \leqslant D \leqslant C_A$ 使

$$W \cong C_q \times C_q \text{ 且 } D/C_D(W) \cong SL_2(q).$$

设 $q = 3$. 那么 W 具有所要求的性质, 并且因为 $D/C_D(W) \cong SL_2(3)$ 包含一个 6 阶元素所以 $C_A/O_{2'}(C_A)$ 中存在 6 阶元素 (见 8.6.10 且注意 $O_{2'}(SL_2(3)) = 1$).

现在设 $q=2$ 且 $\overline{C}_A := C_A/O_{2'}(C_A)$. 那么 $D\backslash C_D(W)$ 中的每一个 3 元素 d 无不动点地作用在 W 上. 因此 $\overline{C}_A$ 满足 8.5.6 的假设条件, 从而 C_A 也包含 8 阶的初等交换子群. □

下面 $\mathcal{B}$ 记作 A 的所有极大子群 B 的集合[①], 且 B 总是表示 $\mathcal{B}$ 中的元素. 对 $q\in\pi(\theta)$, 设

$$\begin{aligned}
&K := \theta_{q'}(G),\\
&K_\vee(B) := \langle O_{q'}(C_a) \mid a\in B^\#\rangle,\ B\in\mathcal{B},\\
&K_\wedge(B) := \bigcap_{a\in B^\#} O_{q'}(C_a),\ B\in\mathcal{B},\\
&K_{\mathcal{B}} := \langle K_\wedge(B) \mid B\in\mathcal{B}\rangle.
\end{aligned}$$

这 4 个子群都是 C_A 不变的, 所以它们都在 K 中. 另外还有

对所有的 $B, B_1\in\mathcal{B}$ 和 $a\in(B\cap B_1)^\#$, 有 $K_\wedge(B_1)\leqslant O_{q'}(C_a)\leqslant K_\vee(B)$.

特别地,

对所有的 $B\in\mathcal{B}$, 有 $K_\wedge(B)\leqslant K_{\mathcal{B}}\leqslant K_\vee(B)$.

(6) (6a) $K_{\mathcal{B}}\cap H\leqslant O_{q'}(H)$, $\forall H\in И$.

(6b) 如果 $H\in И$ 使对所有的 $a\in A^\#$ 有 $H\cap C_a\leqslant O_{q'}(C_a)$, 那么 $H\leqslant K_{\mathcal{B}}$.

(6c) 如果 $F\leqslant C_A$ 是非循环的交换 q 子群, 那么

$$K_{\mathcal{B}} = \langle O_{q'}(\theta(C_G(f))) \mid f\in F^\#\rangle.$$

特别有 $\theta(C_G(F))\leqslant N_G(K_{\mathcal{B}})$.

证明 (a) 注意到 $K_\vee(B)\cap H$ 是 H 的 $H\cap C_B$ 不变 q' 子群. 对每一个 $B\in\mathcal{B}$, 因为 $K_{\mathcal{B}}\cap H\leqslant K_\vee(B)\cap H$, 所以得到 $[K_{\mathcal{B}}\cap H, H\cap C_B]$ 是 q' 子群. 因此从 11.3.1 得到 (a).

(b) 有

$$H\cap C_B = C_H(B) = \bigcap_{a\in B^\#}(H\cap C_a)\leqslant K_\wedge(B),$$

所以 $H=\langle H\cap C_B \mid B\in\mathcal{B}\rangle\leqslant K_{\mathcal{B}}$.

(c) 设 $f\in F^\#$. 那么 $\langle f\rangle$ 是 A 不变的从而 $\langle f\rangle\in И$. 设 $C_f := \theta(C_G(f))$. 因为 $K_{\mathcal{B}}$ 是 C_A 不变的 q' 子群, 所以

$$K_{\mathcal{B}} = \langle K_{\mathcal{B}}\cap C_f \mid f\in F^\#\rangle \overset{(a)}{\leqslant} \langle O_{q'}(C_f) \mid f\in F^\#\rangle.$$

---

① 这和前面章节中的记号是不同的.

反之, 对 $a \in A^{\#}$ 由 8.2.12 得到

$$C_a \cap O_{q'}(C_f) \leqslant O_{q'}(C_{C_a}(f)) \leqslant O_{q'}(C_a),$$

这蕴含了 (c). □

(7) 对所有的 $q \in \pi(\theta)$ 有 $K_B = 1$.

证明 假设 $K_B \neq 1$ 且设

$$N := \theta(N_G(K_B)).$$

那么 $C_A \leqslant N$, 从而 (3) 和 (4b) 蕴含

(′) 对所有的 $S \in \mathcal{U}_\theta^*$ 有 $S \nleqslant N$.

由 (5), 存在 $E \leqslant C_A$ ($\leqslant N$) 使

$$E \cong \begin{cases} C_q \times C_q, & q = 3, \\ C_q \times C_q \times C_q, & q = 2. \end{cases}$$

设 Q 是 N 的使 $E \leqslant Q \leqslant N$ 的 A 不变 Sylow q 子群.

首先证明论断

(″) $\mathcal{U}_{q'}$ 中的每一个 Q 不变 q' 子群都包含在 K_B 中

不成立.

为了证明这个论断, 设 Q_1 是 $\theta(N_G(Q))$ 中的 A 不变 Sylow q 子群. 那么 $K_0 := \langle K_B^{Q_1 \cap C_B} \rangle$ 是 Q 不变的. 另一方面,

$$K_B \leqslant K_\vee(B) \leqslant K \text{ 且 } Q_1 \cap C_B \leqslant C_B \leqslant \theta(N_G(K_\vee(B))),$$

所以 K_0 是$\mathcal{U}$中的 A 不变 q' 子群.

现在假定 (″) 成立. 那么 $K_0 = K_B$ 从而 $Q_1 \cap C_B \leqslant N$. 由此得到

$$Q_1 = \langle Q_1 \cap C_B | B \in \mathcal{B} \rangle \leqslant N,$$

从而因 $Q \leqslant Q_1$ 而有 $Q = Q_1$. 这证明了 $Q \in \mathcal{U}_q^*$, 这和 (′) 矛盾.

只要证明 (″) 就导出了矛盾. 设 $U \neq 1$ 是 $\mathcal{U}_{q'}$ 中的 Q 不变子群. 首先假定 $q = 2$, 则 $|E| = 8$. 那么

$$U \overset{\text{(cp)}}{=} \langle C_U(F) | F \leqslant E, |F| = 4 \rangle \overset{\text{(6c)}}{\leqslant} N,$$

从而因为 $Q \in \mathrm{Syl}_q N$ 而有 $U \leqslant O_{q'}(N)$(见 103 页 6.4.4).

设 $F \leqslant E$ 使 $|F| = 4$. 那么

$$C_U(F) \leqslant O_{q'}(N) \cap \theta(N_G(F)) \leqslant O_{q'}(\theta(C_G(F))),$$

于是 8.2.12 蕴含对所有的 $f \in F^{\#}$ 有

$$C_U(F) \leqslant O_{q'}(\theta(C_G(F))) \leqslant O_{q'}(\theta(C_G(f))) \overset{(6c)}{\leqslant} K_B.$$

由此得到

$$U = \langle C_U(F) | F \leqslant E, |F| = 4 \rangle \leqslant K_B,$$

这时如果 $q = 2$ 那么 $('')$ 成立.

现在假定 $q = 3$, 则有 $|E| = 9$ 且对每一个 $a \in A^{\#}$ 有 $E \leqslant C_A \leqslant C_a$. 设 S_0 是 $C_{C_a}(E)$的 A 不变 Sylow q 子群. 那么 $E \leqslant Z(S_0)$ 从而有

(z) $Z(S_0) \in \mathrm{Syl}_q\, C_{C_a}(S_0)$,

并且(6c) 蕴含了 $S_0 \leqslant N$. 因此存在 $d \in C_A$ 使 $S_0 \leqslant Q^d$ 从而

$$S_0 \leqslant C_a \cap Q^d = (C_a \cap Q)^d.$$

q' 群 $T := (U \cap C_a)^d \leqslant C_a$ 被 q 群 S_0 正规化. 设

$$\overline{C}_a := C_a / O_{q'}(C_a) \text{ 且 } \overline{X} := O_q(\overline{C}_a).$$

半直积 S_0T 作用在 q 群 $\overline{X}$ 上, 从而有

$$C_{\overline{X}}(S_0) \overset{(cp)}{=} \overline{C_X(S_0)} \overset{(z)}{\leqslant} \overline{Z(S_0)} \cap \overline{X} \text{ 且 } [\overline{Z(S_0)} \cap \overline{X}, T] \leqslant \overline{X} \cap \overline{T} = 1.$$

于是 155 页 8.5.3 表明了 $[\overline{X}, T] = 1$. 由此得到 $T \leqslant O_{q'}(C_a)$ 从而因为 $d \in C_a$ 有 $U \cap C_a \leqslant O_{q'}(C_a)$. 于是 (6b)(使 $H = U$) 蕴含了 $('')$. □

(8) 设 $M \in И^*$ 使 $C_A \leqslant M$. 那么对某个素数 $q \in \pi(\theta)$ 有 $F(M) = O_q(M)$.

证明　设 M 是反例, 则由 (2) 得 $O_2(M) \neq 1 \neq O_3(M)$. 并且设 $E \leqslant C_A$ 是和 (5) 中一样的初等交换 q 子群, 则 $r(E) \geqslant 2$. 那么 $C_{O_q(M)}(E) \neq 1$, 存在 $e \in E^{\#}$ 使 $O_{q'}(M) \cap \theta(C_G(e)) \neq 1$. 由此得到

$$C_{O_2(M)}(e) \neq 1 \neq C_{O_3(M)}(e).$$

因此由 11.2.2 得 M 是 $И^*$ 中唯一包含 $C_{F(M)}(e)$ 的子群. 特别有 $\theta(C_G(e)) \leqslant M$. 这证明了

$$O_{q'}(M) \cap \theta(C_G(e)) \leqslant O_{q'}(\theta(C_G(e))) \overset{(6c)}{\leqslant} K_B \overset{(7)}{=} 1,$$

得到矛盾. □

现在导出最终矛盾, 从而说明 (G, A, θ) 不是反例. 设 $S \in И_2^*$, 则存在 $B \in \mathcal{B}$ 使

$$Z := Z(S) \cap C_B \neq 1.$$

另一方面, 由 (7) 得当 $q=3$ 时有 $K_B=1$. 因此存在 $b\in B^{\#}$ 使

$$Z_B\not\leqslant O_{3'}(C_b)=O_2(C_b).$$

设 $M\in\mathcal{U}^*$ 使 $C_b\leqslant M$. 那么也有 $C_A\leqslant M$, 从而 11.1.9 蕴含 $S\cap M\in \mathrm{Syl}_2M$. 特别有

$$O_2(M)\leqslant S \text{ 且 } [O_2(M),Z_B]=1.$$

但是因为 $O_2(M)\cap C_b\leqslant O_2(C_b)$ 而有 $Z_B\not\leqslant O_2(M)$, 所以 (8) 和 6.4.4 给出

$$F(M)=O_3(M) \text{ 且 } [O_3(M),Z_B]\neq 1.$$

因为 $O_3(M)=\langle C_{\widetilde{B}}\cap O_3(M)|\widetilde{B}\in\mathcal{B}\rangle$, 所以存在 $\widetilde{B}\in\mathcal{B}$ 使

$$O_3(M)\cap C_{\widetilde{B}}\not\leqslant C_G(Z_B).$$

因此

(+) $[C_{\widetilde{B}},Z_B]$ 不是 2 群.

对 $T\in\mathcal{U}_3^*$ 由相同的论证得到存在子群 $D,\widetilde{D}\in\mathcal{B}$ 使 $Z(T)\cap C_D\neq 1$ 且

(++) $[C_{\widetilde{D}},Z(T)\cap C_D]$ 不是 3 群.

现在用 $r(A)\geqslant 3$. 那么 $\widetilde{B}\cap\widetilde{D}\neq 1$, 所以存在 $1\neq w\in\widetilde{B}\cap\widetilde{D}$. 设

$$C_w\leqslant H\in\mathcal{U}^*.$$

根据 (8) 有 $F(H)=O_2(H)$ 或 $F(H)=O_3(H)$, 由 11.1.9(a) 证得

$$S\cap H\in\mathrm{Syl}_2H \text{ 且 } T\cap H\in\mathrm{Syl}_3H.$$

假定 $F(H)=O_2(H)$. 那么 $O_2(H)\leqslant S$, 从而

$$Z_B\leqslant C_H(O_2(H))\overset{6.4.4}{\leqslant}O_2(H).$$

因此由 $C_{\widetilde{B}}\leqslant H$ 得 $[C_{\widetilde{B}},Z_B]$ 是 2 群. 这和 (+) 矛盾.

如果 $F(H)=O_3(H)$, 那么用 T 代替 S 由类似的论证得 $[C_{\widetilde{D}},Z(T)\cap C_D]$ 不是 3 群. 这和 (++) 矛盾. □

第 12 章将用到完备定理. 这里给出一个初步结论.

11.3.3 设 A 是使 $r(A)\geqslant 3$ 且作用在 p' 群 G 上的初等交换 p 群. 假设

对所有的 $a\in A^{\#}$ 都有 $C_G(a)$ 可解.

那么 G 可解.

证明　定义

$$\theta(C_G(a)) := C_G(a),\ a \in A^{\#}.$$

由 11.1.1 得 θ 是 G 上的可解 A 信号函子. 由上面的 Glauberman 完备定理得这个信号函子是完备的. 于是 8.3.4 蕴含 G 是 $\mathcal{U}_\theta(A)$ 的极大元素. 特别地, G 可解.

□

第12章　N　群

本章将展示如何运用前面章节中所建立的方法和结果. 目标是研究 N 群的结构. 这里N 群是满足下面的群 G:

$\mathcal{N}$　G 是偶数阶的且 G 的每一个 2 局部子群都是可解的.

这个定义和文献中用到的稍微有点区别, 文献中的 N 群 G 不仅对 2 而且对 $\pi(G)$ 中的每一个素数 p 都满足 $\mathcal{N}$, 即 G 的每一个局部子群都可解. 所有满足这个强一些的条件的非可解群已经被 Thompson[94] 分类. 后来 Gorenstein 和 Lyon[61], Janko[73] 和 Smith[83] 将他的结果推广到满足条件 $\mathcal{N}$ 的群上. 在 20 世纪 70 年代, Thompson 的证明成为有限单群分类的样本.

关于 N 群的完全解决已超出本书的范围. 因此本章假定有下面的附加假设:

$\mathcal{Z}$　对 $S \in \mathrm{Syl}_2 G$ 有 $C_G(\Omega(Z(S))) \leqslant N_G(S)$.

满足 $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{N}$ 的群称作 ZN 群.

性质 $\mathcal{Z}$ 蕴含 $C_G(\Omega(Z(S)))$ 从而 $N_G(\Omega(Z(S)))$ 也是 2 闭的. 因此 $\mathcal{Z}$ 等价于

$$\text{对 } S \in \mathrm{Syl}_2 G, \text{ 有 } N_G(\Omega(Z(S))) \leqslant N_G(S).$$

例如, Sylow 2 子群的正规化子是极大子群的单 N 群具有这种性质.

对很多分类问题来说, ZN 群的这种研究方式都是很典型的.

- 化简到局部特征为 2 的群上.
- 决定 2 局部结构.
- 通过它们的 2 局部结构来确定相应的群.

对 ZN 群实行前两步. 对于群的确定参照相应的文献.

在本章, G 的强 2 嵌入子群 (定义见 198 页) 将被称作在 G 中是强嵌入的 (strongly embedded).

群 G 具有局部特征 2, 如果 G 的阶是偶数且

$\mathcal{L}$　对 G 的所有 2 局部子群 L 有 $C_L(O_2(L)) \leqslant O_2(L)$.

换句话, 如果一个偶数阶群的每一个 2 局部子群具有特征 2, 那么这个群具有局部特征 2. 进一步注意, 因为对某个非平凡 2 局部子群 $Q \leqslant O_2(L)$ 有 $L = N_G(Q)$ 且

$$C_G(O_2(L)) \leqslant C_G(Q) \leqslant L,$$

所以条件 $C_L(O_2(L)) \leqslant O_2(L)$ 蕴含表面上更强的条件

$$C_G(O_2(L)) \leqslant O_2(L).$$

如果 G 是偶数阶的 N 群, 那么由 6.4.4(a) 得 $\mathcal{L}$ 等价于

对 G 的所有 2 局部子群 L, 有 $O_{2'}(L) = 1$.

本章证明

定理 1　设 G 是使 $O_{2'}(G) = 1 = O_2(G)$ 的 ZN 群且令 $S \in \mathrm{Syl}_2\ G$ 和 $Z := \Omega(Z(S))$. 那么对

$$H := O^2(G) \text{ 和 } R := S \cap H,$$

下面结论之一成立:

(a) H 含有强嵌入的子群.

(b) R 是二面体或半二面体群.

(c) $Z \cap R \cong C_2$ 且 $Z \cap R$ 关于 H 在 R 中弱闭.

(d) $\Omega(R) = Z \cong C_2 \times C_2$.

在定理 1 的所有 4 种情形中, 如下定理使得能够确定与每种情况相对应的群:

- Bender 关于具有强嵌入子群的群的定理.
- Gorenstein-Walter 关于具有二面体 Sylow 2 子群的群的定理.
- Alperin-Brauer-Gorenstein 关于具有半二面体 Sylow 2 子群的群的定理.
- Glauberman Z^* 定理 (情形 (c))
- Goldschmidt 关于具有强闭交换 2 子群的群的定理 (情形 (d)).

因为它们不仅可以用于特殊情形下有用而且对整体的单群分类定理是至关重要的, 所以在附录中陈述这些结果.

定理 1 的证明的第一步 (见 12.1 节) 刻画了不是局部特征为 2 的群. 可以在以下稍弱一点的假设下完成证明:

$\mathcal{C}$　G 是偶数阶的且对每一个对合 $t \in G$ 都有 $C_G(t)$ 可解.

这是能够做到的.

同时满足 $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{C}$ 的群叫做$\mathcal{ZC}$群. 运用 Glauberman 完备定理在 12.1 节中证明

定理 2　设 G 是使 $O_{2'}(G) = 1 = O_2(G)$ 的 $\mathcal{ZC}$ 群. 那么或者定理 1 的情形 (a), (c) 和 (d) 之一成立, 或者 $O^2(G)\Omega(Z(S))$ 的局部特征为 2.

定理 1 的证明的第 2 部分 (见 12.2 节和 12.3 节) 研究了局部特征为 2 的群的 2 局部结构. 在主要运用第 9 章和第 10 章的定理对 2 局部结构进行长篇的分析后, 以下面的令人惊奇的初等结构结束:

定理 3 设 G 是使 $O_2(G)=1$ 且局部特征为 2 的 ZN 群. 那么或者 G 有强嵌入子群, 或者 $O^2(G)$ 有两个极大 2 局部子群 M_1 和 M_2 使

(∗) $M_1 \cong S_4 \cong M_2$ 且 $M_1 \cap M_2 \in \mathrm{Syl}_2 M_i, i=1,2$.

应该指出的是在定理 2 中出现的强嵌入子群同定理 3 中的一样. 对强嵌入子群在分类问题中的影响来说这是典型的, 且展示了 Bender 定理的极端重要性. 强嵌入子群在定理 2 中同奇阶非平凡子群的正规化子一样出现, 在定理 3 中同非平凡 2 子群的正规化子一样出现.

最后一个初等论证证明了定理 3 的 (∗) 蕴含定理 1 的情形 (b), 这结束了定理 1 的证明.

12.1 完备定理的应用

本节研究非平凡信号函子的存在性和强嵌入子群的存在性之间的关系.

在转入定理 2 的证明之前, 需要两个独立的引理.

12.1.1 转移定理 设 G 是一个群且 $S \in \mathrm{Syl}_2 G$. 假设存在 S 的极大子群 U 和对合 $t \in S$ 使 $t^G \cap U = \varnothing$. 那么 t 不包含在 $O^2(G)$ 中.

证明 群 G 由右乘作用在陪集 $Ug, g \in G$ 的集合 Ω 上. 设 $n := |\Omega| = |G:U|$ 且 φ 是从 G 到 S_n 中描述 G 在 Ω 上这个作用的同态. 那么

$$n = 2|G:S| \text{ 且 } |G:S| \text{ 是奇数.}$$

对 $Ug \in \Omega$ 有

$$(Ug)t = Ug \Leftrightarrow gtg^{-1} \in U.$$

假设 $U \cap t^G = \varnothing$ 表明 S_n 的对合 t^φ 在 $\{1, \cdots, n\}$ 上没有不动点, 所以 t^φ 是 $n/2$ 个对换的乘积. 因为 $n/2 = |G:S|$ 是奇数, 所以 t^φ 不在 A_n 中从而不在 $N := A_n^{\varphi^{-1}}$ 中. 还有 $|S_n/A_n| = 2$ 蕴含 $|G/N| = 2$, 所以 $O^2(G) \leqslant N$ 从而 $t \notin O^2(G)$. □

12.1.2 设 G 是满足 $\mathcal{C}$ 的群. 假设对 G 中的每一个对合 t 有 $O_{2'}(C_G(t)) = 1$. 那么 G 的局部特征为 2.

证明 通过导出矛盾的方法来证明, 可假定中 G 存在 2 局部子群 L 使

$$C_L(O_2(L)) \not\leqslant O_2(L).$$

那么 111 页 6.5.8 蕴含

$$F^*(G) \neq O_2(L).$$

设 t 是 $Z(O_2(L))$ 中的对合, 则有 $F^*(L) \leqslant C_G(t)$. 由假设得 $C_G(t)$ 可解. 于是 $F^*(L) = F(L)$ 从而

$$O_{2'}(L) \neq 1.$$

运用 8.2.13, 用

$$(2, L, C_G(t), O_{2'}(t)) \text{ 替代 } (p, N_G(P), L, U)$$

得到 $1 \neq O_{2'}(L) \leqslant O_{2'}(C_G(t))$, 这是一个矛盾. □

现在开始证明定理 2, 考虑下面的情形:

G 是 ZC 群且使 $O_2(G) = 1 = O_{2'}(G)$,

$\mathcal{S}$　$H := O^2(G)$,

$$S \in \mathrm{Syl}_2 G,\ Z := \Omega(Z(S)) \text{ 且 } T := S \cap H \in \mathrm{Syl}_2 H.$$

设 $\mathcal{B}(G)$ 是 G 的包含 8 阶初等交换子群的极大①交换 2 子群的集合. 注意 11.1.1 对 $B \in \mathcal{B}$ 有

$$\theta_B : a \mapsto O_{2'}(C_G(a)),\ a \in \Omega(B)^\#$$

是 G 上的可解 $\Omega(B)$ 信号函子.Glauberman 完备定理 (见 11.3.2) 表明 θ_B 是完备的. 把 $\mathcal{U}_{\theta_B}(\Omega(B))$ 中的极大元素记作 $\theta_B(G)$. 从信号函子的定义显然得到对 $R := \theta_B(G)$ 有

$$C_R(a) = O_{2'}(C_G(a)), \text{ 对于 } a \in B^\#,$$

$$C_R(B_0) = O_{2'}(C_G(B_0)), \text{ 对于 } 1 \neq B_0 \leqslant B,$$

$$R = \langle O_{2'}(C_G(a)) | a \in B^\# \rangle.$$

对每一个 $g \in G$ 有 $R^g = \theta_{B^g}(G)$, 特别有 $N_G(B) \leqslant N_G(R)$.

12.1.3　假设 $\mathcal{S}$ 成立. 设 $B \in \mathcal{B}(G)$ 且 R 是 G 的 B 不变 $2'$ 子群. 那么

$$R \leqslant \theta_B(G).$$

证明　从 11.3.3 得到 R 是可解的. 因此根据 $\theta_B(G)$ 的定义, 只要证明

$$\text{对每一个 } b \in B^\#, \text{ 有 } C_R(b) \leqslant O_{2'}(C_G(b)).$$

设 $b \in B^\#$ 且 $X := C_R(b)$. 取适当的共轭后可假定

(1) $B \leqslant C_G(b) \cap S \in \mathrm{Syl}_2 C_G(b)$.

因为 $B \in \mathcal{B}(G)$ 所以有

(2) $Z \leqslant C_S(B) = B$.

这证明了 $R^Z = R$, 所以

(3) $X \overset{8.2.7}{=\!=} C_X(Z)[X, Z]$

且

$$[X, Z] \overset{6.4.4}{\leqslant} R \cap O_{2'2}(C_G(b)) \leqslant O_{2'}(C_G(b)).$$

① 关于包含关系.

于是只剩下证 $Q := C_X(Z) \leqslant O_{2'2}(C_G(b))$. 性质 Z 蕴含 $S^Q = S$. 因为 Q 是 B 不变的由此得到 $QB = Q \times B$. 于是由 $P \times Q$ 引理和 (2) 证明了

$$[S, Q] = 1.$$

特别有 $[Q, S \cap C_G(b)] = 1$. 因此由 6.4.4(b) 得到 $Q \leqslant O_{2'}(C_G(b))$, 从而完成了证明. □

12.1.4　假设 $\mathcal{S}$ 成立. 设 $A, B \in \mathcal{B}(G)$ 使 $A, B \leqslant S$. 那么 $\theta_A(G) = \theta_B(G)$. 特别地, 对 $\mathcal{B}(G)$ 中所有使 $B \leqslant S$ 的 B 有 $N_G(S) \leqslant N_G(\theta_B(G))$.

证明　设 $R := \theta_B(G)$ 且 $M := N_G(R)$. 那么

$$B \leqslant S \cap M =: S_0,$$

从而对 $x \in N_S(S_0)$ 也有 $B \leqslant S_0 \leqslant N_G(R^x)$. 于是由 12.1.3 得 $R = R^x$ 且 $x \in M \cap S = S_0$. 因此 $N_S(S_0) = S_0$, 从而 $S = S_0 \leqslant M$. 特别 $A \leqslant M$, 再次由 12.1.3 得

$$R = \theta_B(G) \leqslant \theta_A(G).$$

互换 A 和 B 的角色, 由对称的论证得到 $\theta_A(G) \leqslant \theta_B(G)$ 从而 $\theta_A(G) = \theta_B(G)$.

因为 $N_G(S)$ 作用在 $\mathcal{B}(S)$ 上, 也得到

$$\text{对 } g \in N_G(S) \text{ 有 } \theta_{B^g}(G) = \theta_B(G)^g = \theta_B(G).$$ □

12.1.5　假设 $\mathcal{S}$ 成立. 那么下面之一成立:

(a) TZ 的每一个对合都包含在 $\mathcal{B}(G)$ 的一个元素中.

(b) $Z \cong C_2$ 且 H 的所有对合都是 Z 中对合的 H 共轭.

(c) $\Omega(T) = Z \cong C_2 \times C_2$.

(d) $Z \cap T \cong C_2$ 且 $Z \cap T$ 关于 H 在 T 中弱闭.

证明　设 $\mathcal{N}(S)$ 是 S 中所有非平凡初等交换正规子群的集合. 假设存在 $X \in \mathcal{N}(S)$ 使 $r(X) \geqslant 3$. 那么因 S 的每一个对合 t 二次作用在 X 上 (见 171 页例 (b) 和 9.1.1(b)) 而有

$$r(C_X(t)) \geqslant 2.$$

因此 $|C_X(t)\langle t\rangle| \geqslant 8$, 从而 $C_X(t)\langle t\rangle$ 包含在 $\mathcal{B}(G)$ 的一个元素中. 这就得到 (a). 于是可假设

(1) 对所有的 $X \in \mathcal{N}(S)$ 有 $r(X) \leqslant 2$.

假设对所有的 $X \in \mathcal{N}(S)$ 有 $r(X) = 1$. 那么 5.3.9 证明了 S 包含一个循环的极大子群. 因此 T 也包含循环的极大子群 U. 并且因为 $r(Z) = 1$ 所以若 $U \neq 1$ 则 $Z \leqslant U$. 于是把 Thompson 转移引理 (见 12.1.1) 应用到 H 和 T 上得到 (b). 于是可假定

(2) 存在 $V \in \mathcal{N}(S)$ 使 $V \cong C_2 \times C_2$.

设 $S_0 := C_S(V)$. 那么 S_0 是 S 中指数最多为 2 的子群. 假设 $V < \Omega(S_0)$. 那么 S_0 中的每一个对合均包含在 $\mathcal{B}(G)$ 的一个元素 B 中. 如果 $V = Z$, 那么 $S = S_0$ 从而得到 (a). 在另外的情形,

$$V \neq Z,\ |Z| = |S/S_0| = 2.$$

从而因 T 正规于 S 而有 $Z \leqslant T$. 于是由 12.1.1 证得 $T \backslash S_0$ 中的每一个对合都和 S_0 中的一个对合共轭. 从而 (a) 再次成立. 因此可假设

(3) $V = \Omega(S_0)$, 特别有 $Z \leqslant V$.

假设存在 $B \in \mathcal{B}(G)$ 使 $B \leqslant S$. 那么由 (2) 和 (3) 得到 $B \not\leqslant S_0$ 且 $V \leqslant B \cap S_0$. 但现在有 $B \leqslant C_S(V) = S_0$, 得到矛盾. 已经证明了

(4) $\mathcal{B}(G) = \varnothing$.

假设 $Z \ncong C_2$, 所以有 $Z = V$, 从而 $S_0 = S$. 设 $Z_0 := Z \cap T$. 如果 $Z \leqslant T$, 那么 (3) 蕴含 (c). 在另外的情形 $Z_0 = \Omega(T) \cong C_2$, 从而 (d) 成立. 因为 $Z_0 \neq 1$, 现在可假定

(5) $Z \cong C_2$ 且 $Z \leqslant T$.

特别地, 有 $Z < V$ 从而

$$|S : S_0| = 2.$$

从现在起假定 (d) 不成立. 那么存在 $g \in H$ 使 $Z \neq Z^g \leqslant S$. 设

$$W := ZZ^g\ (\cong C_2 \times C_2),\ M := N_G(W) \text{ 和 } D := S \cap S^g.$$

由假设 Z 得到

$$C_G(W) = N_G(S) \cap N_G(S^g) \text{ 且 } C_S(W) = D.$$

进而由 (4) 得

(6) $W = \Omega(D)$.

因 $D \neq S$, 所以 $D < N_S(W)$ 和 $D < N_{S^g}(W)$. 因此 $M/C_G(W)$ 非 2 闭. 由此得到

$$M/C_M(W) \cong S_3 \text{ 且 } (S \cap M)/D \cong C_2.$$

特别地, W 中的所有对合在 $O^2(M)$ 下共轭.

首先假设 $S \leqslant M$. 那么 D 是 S 的极大子群, 由 12.1.1 得 T 的每一个对合在 H 中和 $D \cap T$ 的一个对合共轭. 但由 (6) 知后面的对合在 $W \cap T$ 中从而是 Z 中对合的 $O^2(M)$ 共轭. 因 $O^2(M) \leqslant H$ 这蕴含 (b).

现在假设 $S \not\leqslant M$. 那么存在 $x \in N_S(S \cap M)$ 使 $W^x \neq W$. 于是 $|(S \cap M) : D| = 2$, (6) 蕴含

$$S \cap M = W^x D = W D^x \text{ 且 } D = W(D \cap D^x).$$

由此得到

$$\Phi(D) = \Phi(D \cap D^x).$$

假定 $\Phi(G) \neq 1$. 那么 $W \cap \Phi(D) \neq 1$ 且因为 $D = O_2(M)$ 而有 $W \cap \Phi(D)$ 是 M 不变的. 由 M 在 $W^\#$ 上的传递作用得到

$$W \leqslant \Phi(D) = \Phi(D \cap D^x) \leqslant D^x,$$

这和 $\Omega(D^x) = W^x \neq W$ 矛盾.

已经证明了 $\Phi(D) = 1$, 从而 $D = W$. 另一方面, 因为 $|V/Z| = 2$ 和 $V \trianglelefteq G$ 而有

$$[V, W] \leqslant Z \leqslant W.$$

因此

$$V \leqslant S \cap M = WW^x.$$

因为 WW^x 是 8 阶非交换群, 所以 WW^x 是 8 阶二面体群, W 和 W^x 是其中仅有的两个 4 阶初等交换子群的. 由此得到 $V = W$ 或 $V = W^x$. 因为 x 在 S 中所以两种情形均有 $V = W = W^x$, 得到矛盾. □

12.1.6 假设 S 且 12.1.5 中的情形 (a) 和 (b) 之一成立. 那么 H 有强嵌入子群或 HZ 具有局部特征 2.

证明 可假设 HZ 不具有特征 2. 那么由 12.1.2, 存在对合 $t \in HZ$ 使 $O_{2'}(C_{HZ}(t)) \neq 1$, 所以也有

$$O_{2'}(C_G(t)) \neq 1.$$

首先假设 12.1.5 的情形 (b) 成立. 那么 t 和 Z 的对合 z 共轭, 从而因 Z 成立且 $|Z| = 2$ 而有 $C_G(z) = N_G(S)$. 由此得到

$$R := O_{2'}(N_G(S)) = O_{2'}(C_G(z)) \neq 1.$$

设 $M := N_H(R)$. 那么因 $O_{2'}(G) = 1$ 得 $M \neq H$. 将证明 M 在 H 中强嵌入.

假定存在 $g \in H \backslash M$ 使 $M \cap M^g$ 具有偶数阶. 那么 $M \cap M^g$ 包含一个对合 v, 在 M 中取合适的共轭后, 可假定

$$v \in S \cap S^g.$$

因为 $[R, S] = 1$, 得到

$$[R, v] = 1 = [R^g, v],$$

所以 $\langle R, R^g \rangle \leqslant C_G(v)$. 因为 $R = O_{2'}(C_G(z))$ 且 $\langle Z^g, Z \rangle \leqslant C_G(v)$, 能够运用 144 页 8.2.13 到 $C_G(v)$ 上, 从而得到

$$\text{对某个 } y \in G \text{ 有 } \langle R, R^g \rangle \leqslant O_{2'}(C_G(v)) \overset{(b)}{=} O_{2'}(N_G(S^y)) = R^y.$$

因此 $R = R^g$ 从而 $g \in M$. 这个矛盾证明了 M 在 H 中强嵌入.

现在假设 12.1.5 的情形 (a) 成立. 那么存在 $B \in \mathcal{B}(G)$ 使 $t \in B$. 因为 $C_G(t)$ 可解, 得到

(1) $1 \neq O_{2'}(C_G(t)) \leqslant \theta_B(G)$.

现在设

$$R := \theta_B(G) \text{ 且 } M := N_G(R),$$

证明 $M \cap H$ 在 H 中强嵌入.

同上面, $O_{2'}(G) = 1$ 表明 $M \cap H \neq H$. 根据 12.1.4, 在取合适的共轭后, 可假定

(2) $B \leqslant S \leqslant N_G(S) \leqslant M$.

设 $g \in G \setminus M$. 如果存在 $A \in \mathcal{B}(G)$ 使 $A \leqslant M \cap M^g$, 那么再次由 12.1.3 和 12.1.4 得到 $R = R^g$ 从而 $g \in M$. 于是有

(3) 对所有的 $A \in \mathcal{B}(G)$ 和 $g \in G \setminus M$ 有 $A \not\leqslant M \cap M^g$. 特别地, $M \cap M^g$ 不包含 G 的 Sylow 2 子群.

下面证明:

(4) 对所有的 $g \in G \setminus M$ 有 $Z \not\leqslant M \cap M^g$.

假定 (4) 不成立. 那么存在 $g \in G \setminus M$ 使

$$Z \leqslant M \cap M^g =: D.$$

由 (2), $S \in \mathrm{Syl}_2 M$, 所以

$$\text{对某个 } h \in M^g \text{ 有 } Z \leqslant S^{gh}.$$

特别有 $[Z, Z^{gh}] = 1$, 从而由 Z 和 (2) 得到 $ZZ^{gh} \leqslant D$ 且 $Z \neq Z^{gh}$. 因为也有 $gh \in G \setminus M$, 所以可假定

$$ZZ^g \leqslant S \cap S^g \leqslant D.$$

设

$$W := ZZ^g,$$

则因 $Z \neq Z^g$ 而有 $r(W) \geqslant 2$. 如果 $r(W) \geqslant 3$, 那么存在 $A \in \mathcal{B}(G)$ 使 $W \leqslant A$. 但 Z 蕴含 $A \leqslant S \cap S^g \leqslant D$, 和 (3) 矛盾. 于是有

$$W \cong C_2 \times C_2 \text{ 且 } |Z| = 2.$$

于是同 12.1.5 的证明中那样, 由 (2) 得到

$$N_G(W)/C_G(W) \cong S_3.$$

特别地, $W^{\#}$ 的所有元素共轭. 因此对 $a \in W^{\#}$ Z 蕴含

$$C_G(a) = N_G(S^y),\ y \in G.$$

因为 $R^W = R$ 且 $W \leqslant S^y$, 得到

对所有的 $a \in W^{\#}$, 有 $[C_R(a), W] \leqslant R \cap S^y = 1$.

于是 146 页 8.3.4 证明了

$$R \leqslant C_R(W) \overset{Z}{\leqslant} O_{2'}(C_G(Z)) \cap C_G(Z^g).$$

再次应用 8.2.13 得到

$$R \leqslant O_{2'}(C_G(Z^g)) \overset{12.1.4}{\leqslant} R^g,$$

从而有 $R = R^g$, $g \in M$, 得到矛盾. 因此证明了 (4).

为了导出最终的矛盾, 现在假定 $M \cap H$ 在 H 中不是强嵌入的. 那么存在 $g \in H \backslash M$ 使 $H \cap M \cap M^g$ 是偶数阶的. 首先注意到因 $N_G(S) \leqslant M$ 而由 Frattini 论断得到 $M = N_G(M)$, 所以 $M \neq M^g$. 设

$$Q \in \mathrm{Syl}_2 H \cap M \cap M^g \text{ 和 } D := S \cap S^g.$$

在 M 中取共轭后可假设 $Q \leqslant D$. 由 (2) 和 (3), 存在 $M^g \backslash D$ 的 2 元素 y 使 $Q^y = Q$, 从而由 135 页 8.1.4 得存在对合 $w \in Z(Q)$ 使 $w^y = w$. 因此有

(5) $C := C_G(w) \nleqslant M$.

存在 $x \in G$, 使

$$S \cap C \leqslant S^x \cap C \in \mathrm{Syl}_2 C.$$

因为 $Z \leqslant S \cap C$ 且 $S^x \cap C \leqslant M^x$, (4) 蕴含 $x \in M$. 于是在 M 中取共轭后, 可假设

$$S \cap C \in \mathrm{Syl}_2 C.$$

和 12.1.5 的情形 (a) 中一样, 存在 $A \in \mathcal{B}(G)$ 使 $A \leqslant S \cap C$. 于是 12.1.3 和 12.1.4 蕴含 $O_{2'}(C) \leqslant R$, 故有 $O_{2'}(C)(S \cap C) \leqslant M$. 但此时由 103 页 6.4.4 证得

$$Z \leqslant O_{2'2}(C) \leqslant C \cap M.$$

因此对所有的 $x \in C$, Z 都在 M^x 中, 从而由 (4) 得到 $C \leqslant M$. 这和 (5) 矛盾. □

12.1.5 中的情形 (c),(d) 对应于定理 1 的情形 (c),(d), 情形 (a),(b) 在 12.1.6 中已得到处理. 因此证明了定理 2.

12.2　$J(T)$　分　支

本节中, G 是局部特征为 2 的 ZN 群, T 是 G 的非平凡 2 子群.

把群 X 关于素数 2 的 Thompson 子群的集合记作 $J(X)$. 设 $\mathcal{L}(T)$ 是 G 的满足

$$T \in \mathrm{Syl}_2 L,\ J(T) \not\leqslant O_2(L)\ \text{且}\ C_G(O_2(L)) \leqslant O_2(L)$$

的子群. 最后的条件蕴含 $O_{2'}(L) = 1$,

$$\text{对}\ T \leqslant S \in \mathrm{Syl}_2 G\ \text{有}\ Z(S) \leqslant Z(T) \leqslant Z(O_2(L)).$$

特别地, L 是 ZN 群.

对 $L \in \mathcal{L}(T)$, 用到下面的符号:

$$\begin{aligned} &V := \langle \Omega(Z(T))^L \rangle\ (\leqslant \Omega(Z(O_2(L)))),\\ &C := C_L(V),\\ &\overline{L} := L/C\ \text{且}\ \widetilde{L} := L/O_2(L)^{①}. \end{aligned}$$

12.2.1　设 L 是 G 的 2 局部子群且 $T \in \mathrm{Syl}_2 L$. 那么

$$L \in \mathcal{L}(T) \Leftrightarrow J(T) \not\leqslant O_2(L).$$

证明　因为 G 的局部特征为 2, 所以像 257 页提到的那样, L 满足

$$C_G(O_2(L)) \leqslant O_2(L). \qquad \Box$$

12.2.2　设 $L \in \mathcal{L}(T)$.

(a) $\widetilde{C} = O_{2'}(\widetilde{C})$ 且 $\widetilde{C}\widetilde{T} = \widetilde{C} \times \widetilde{T}$.

(b) $J(T) \not\leqslant C$.

证明　因为 $J(T) \not\leqslant O_2(L)$ 所以从 (a) 得到 (b). 设 $T \leqslant S \in \mathrm{Syl}_2 G$. 同前面所提到的有

$$Z := \Omega(Z(S)) \leqslant \Omega(Z(T)) \leqslant V.$$

于是 Z 蕴含

$$C \leqslant C_G(Z) \cap L \leqslant N_L(S) \leqslant N_L(T).$$

因此 C 是 2 闭的, 从而得到 (a). $\Box$

根据 12.2.2(b) 和 9.2.12 知 $L \in \mathcal{L}(T)$ 不是 Thompson 可分解的, 所以能够运用 9.3 节的结果. 从 9.3.8 得到

① 用拔和波纹的约定.

12.2.3 设 $L \in \mathcal{L}(T)$. 那么 L 中存在子群 $E_1, \cdots, E_r$ 使下面成立:

(a) $C \leqslant E_i \trianglelefteq \trianglelefteq L$.

(b) $\{E_1, \cdots, E_r\}^L = \{E_1, \cdots, E_r\}$.

(c) $\overline{J(L)} = \overline{E}_1 \times \cdots \times \overline{E}_r$.

(d) $V = [V, E_1] \times \cdots \times [V, E_r] \times C_V(\overline{J(L)})$.

(e) $[V, E_i] \cong C_2 \times C_2$ 且 $\overline{E}_i \cong SL_2(2)$, $i = 1, \cdots, r$. □

下面介绍 $J(T)$ 分支这个概念. 独立于 $L \in \mathcal{L}(T)$ 的特殊选择来描述 12.2.3 中群 E_i 的结构可以看作是一个尝试. 这使得能够研究这样的 $J(T)$ 分支到 $\mathcal{L}(T)$ 的不同元素中的嵌入. 最终目标 (见 12.3 节) 是证明一个适当选择的 $J(T)$ 分支可包含在 G 的唯一极大 2 局部子群中.

G 的子群 K 叫做一个$J(T)$ **分支**($J(T)$-component), 如果下面的条件成立:

$\mathcal{K}_1$ $K = O^2(K) = [K, J(T)]$ 且 $K/O_2(K) \cong C_3$,

$\mathcal{K}_2$ 对 $J(T) \leqslant \widehat{T} \in \mathrm{Syl}_2(KJ(T))$ 有 $J(T) = J(\widehat{T})$,

$\mathcal{K}_3$ 对 $W_K := [\Omega(Z(O_2(K))), K]$ 有 $W_K \cong C_2 \times C_2$.

以 $\mathcal{K}(T)$ 表示 G 的 $J(T)$ 分支的集合. 对 $L \leqslant G$, 设

$$\mathcal{K}_L(T) := \{K \in \mathcal{K}(T) | K \leqslant L\},$$

$$\mathcal{K}_0(T) := \{K \in \mathcal{K}(T) | J(T) = J(T_0),\ 对于\ T \leqslant T_0 \in \mathrm{Syl}_2 N_G(W_K)\}.$$

第 1 个观测结果虽然初等但有用:

12.2.4 设 $K \in \mathcal{K}(T)$ 且 Q 是 G 的子群且满足

$$KJ(T) \leqslant N_G(Q)\ 和\ Q \leqslant N_G(J(T)).$$

那么 $Q \leqslant N_G(K)$.

证明 由假设得

$$\langle J(T)^{QK} \rangle = \langle J(T)^K \rangle \overset{\mathcal{K}_1}{=} KJ(T),$$

所以 Q 正规化 $KJ(T)$, 从而再次由 $\mathcal{K}_1$ 得到也有 $O^2(KJ(T)) = K$. □

12.2.5 设 $L \in \mathcal{L}(T)$ 且 $\Omega := \{E_1, \cdots, E_r\}$ 是 L 的在 12.2.3 中给出的次正规子群的集合. 那么对 $K \in \mathcal{K}_L(T)$ 存在双射

$$\rho: \mathcal{K}_L(T) \to \Omega,\ 使\ K = O^2([O^2(K^\rho), J(T)]),$$

并且

$$K \trianglelefteq \trianglelefteq L\ 且\ W_K = [V, K^\rho].$$

证明 设 $K \in \mathcal{K}_L(T)$. 由 12.2.2(a), C 正规化 T 从而也正规化 $J(T)$. 因此由 12.2.4(令 $Q := C$) 得

(1) $K \trianglelefteq KC$.

特别有 $K \trianglelefteq KO_2(L)$ 且

$$K \overset{\mathcal{K}_1}{=} [K, J(T)] \leqslant [KC, J(T)] \leqslant K[C, J(T)] \overset{12.2.2}{\leqslant} KO_2(L).$$

于是 $\mathcal{K}_1$ 蕴含

(2) $K = O^2([KC, J(T)])$.

再次由 $\mathcal{K}_1$ 得

(3) $\overline{K} \leqslant O^2(\overline{E}_1) \times \cdots \times O^2(\overline{E}_r)$,

所以 $O_2(\overline{K}) = 1$ 且

$$O_2(K) \leqslant C \cap O_2(K) \overset{(1)}{\leqslant} O_2(C) \leqslant O_2(L).$$

于是由 $\mathcal{K}_1$ 和 12.2.2(a) 得到

(4) $\overline{K} \cong C_3$ 且 $[V, K] = [V, K, K] = W_K \cong C_2 \times C_2$.

因此, 由 12.2.3 知恰存在一个 $i \in \{1, \cdots, r\}$, 使 $\overline{K}$ 到 $\overline{E}_i$ 上的投射非平凡, 从而有

(5) $KC = O^2(E_i)C$.

这证明了存在映射

$$\rho : \mathcal{K}_L(T) \to \Omega \text{ 使 } \overline{K} = O^2(\overline{K^\rho}).$$

并且对 $E_i = K^\rho$ 有

$$K \overset{(2)}{=} O^2([KC, J(T)]) \overset{(5)}{=} O^2([O^2(E_i)C, J(T)]) \overset{12.2.2(a)}{\leqslant} [O^2(E_i), J(T)]O_2(L).$$

因为 $K = O^2(K)$, 这证明了 $K = O^2([O^2(E_i), J(T)]) = O^2([K^\rho, J(T)])$. 由 (1) 和 (5), K 次正规于 L, 由 (4) 得 $[V, K] = W_K$. 于是只剩下证 ρ 的双射性. 从 (2) 得到单射性.

对于 ρ 的满射性的证明, 固定 $E \in \Omega$ 且设

$$K_0 := O^2([O^2(E_i)C, J(T)]) \text{ 和 } W_0 := [\Omega(Z(O_2(K_0))), K_0].$$

只要证明 K_0 是 $J(T)$ 分支就够了.

显然因 $T \in \mathrm{Syl}_2 L$ 得 K_0 满足 $\mathcal{K}_2$. 设 $X := O^2(E)C$. 由 12.2.2, $\widetilde{X}$ 是 $2'$ 群且

$$|\widetilde{X}/C_{\widetilde{X}}(J(T))| = 3.$$

因此 150 页 8.4.4 蕴含

$$\widetilde{K}_0 = [\widetilde{X}, J(T)] \cong C_3.$$

另外, 因 $K_0 \leqslant [K_0, J(T)]O_2(L)$ 而有 $K_0/[K_0, J(T)]$ 是 2 群. 于是由 K_0 的定义得到

$$K_0 = O^2(K_0) = [K_0, J(T)],$$

从而对 K_0 有 $\mathcal{K}_1$ 成立.

剩下证明 K_0 满足 $\mathcal{K}_3$. 再次由 K_0 的定义得 $[V,K_0]\leqslant W_0$. 因此只需证明 $|W_0|\leqslant 4$ 即可.

在所有满足 $[K_0,A]\not\leqslant O_2(K_0)$ 的 $A\in\mathcal{A}(T)$ 中, 选择 A 使 $C_A(W_0)$ 极大. 存在 $d\in K_0$ 使 $\langle A,A^d\rangle$ 包含 K_0 的一个 Sylow 3 子群 D. 由 150 页 8.4.2, 因 $K_0=DO_2(K_0)$ 得 D 无不动点地作用在 W_0 上. 由此得到

(6) $C_{W_0}(A)\cap C_{W_0}(A^d)=1$ 且 $W_0=[W_0,A][W_0,A^d]$.

设 $A_0:=C_A([W_0,A])[W_0,A]$, $A_1:=C_A(K_0/O_2(K_0))$. 那么 $|A/A_1|=2$, 从而 177 页 9.2.3 蕴含

(7) $A_0\in\mathcal{A}(T)$ 且 $[W_0,A_0]\neq 1$.

因为

$$C_A(W_0)[W_0,A]\leqslant C_{A_0}(W_0),$$

由 $|C_{W_0}(A)|$ 的极大性得 $A_0\leqslant A_1$ 或 $A_0=A$. 在第 1 种情形有

$$A_0^dO_2(K_0)=A_0O_2(K_0)\leqslant C_T([W_0,A])\cap C_T([W_0,A^d]),$$

从而 (6) 蕴含 $[W_0,A_0]=1$, 这和 (7) 矛盾. 在第 2 种情形, 由同样的论证得到 $[W_0,A_1]=1$, 从而 $|A/C_A(W_0)|=2$. 于是由 $|A|$ 的极大性得到 $C_{W_0}(A)=W_0\cap A$ 且

$$|A|\geqslant|W_0C_A(W_0)|=|C_A(W_0)||W_0/C_{W_0}(A)|.$$

于是

$$|W_0/C_{W_0}(A)|=|W_0/[W_0,A]|=2,$$

从 (6) 得到 $|W_0|\leqslant 4$. □

下面的两个结果是 12.2.5 的推论:

12.2.6 设 $L\in\mathcal{L}(T)$, $K\in\mathcal{K}_L(T)$ 且 $Z(T)\cap W_K\neq 1$. 那么 $T\leqslant N_L(K)$.

证明 由 12.2.5, 存在 12.2.3 中那样的子群 E_i 使

$$W_K=[V,E_i]\ 且\ K=O^2([O^2(E_i),J(T)]).$$

因为由 12.2.3 的 (b) 和 (d) 得

$$对\ x\in L\backslash N_L(E_i),\ 有\ [V,E_i]\cap[V,E_i^x]=1.$$

条件 $Z(T)\cap W_K\neq 1$ 蕴含 $T\leqslant N_L(E_i)$, 从而得到结论. □

12.2.7 设 $K\in\mathcal{K}_0(T)$, 那么下面成立:

(a) $N_G(K)=N_G(W_K)$.

(b) 对所有使 $J(T^g)\leqslant N_G(W_K)$ 的 $g\in G$, K 是 $J(T^g)$ 分支.

证明　(a) 设 $L := N_G(W_K)$ 且 $T \leqslant T_0 \in \mathrm{Syl}_2 L$. 那么由 $\mathcal{K}_0(T)$ 的定义得到 $J(T) = J(T_0)$, 所以 K 也是 $J(T_0)$ 分支. 由此得到 $J(T_0) \nleqslant O_2(L)$, 从而由 12.2.1 得 $L \in \mathcal{L}(T_0)$.

运用 12.2.3 和 12.2.5 以及那里给出的符号. 那么存在 $E \in \Omega$ 使

$$K = O^2([O^2(E), J(T)]) \text{ 且 } W_K = [V, E] .$$

于是由 12.2.4 的 (b) 和 (e) 得

$$E \trianglelefteq L \text{ 且 } \overline{J(L)} = \overline{E}.$$

另一方面, 由 Frattini 论断得

$$L = N_L(J(T))J(L) = N_L(J(T))EC,$$

从而由 12.2.2 得 $C \leqslant N_L(J(T))$. 于是得到 (a).

设 $J(T^g) \leqslant N_G(W_K)$. 那么 $J(T^g)$ 是 $J(T)$ 的 $N_G(W_K)$ 共轭, 于是从 (a) 得到 (b). □

现在能够证明本节的主要结果.

12.2.8　设 $K \leqslant L \in \mathcal{L}(T)$ 使 $K \trianglelefteq \trianglelefteq \langle K, J(T)\rangle$. 假设对某个 $g \in G$ 有 $K \in \mathcal{K}_0(T^g)$. 那么 $K \in \mathcal{K}_L(T)$ 且特别有

$$K \trianglelefteq \trianglelefteq L.$$

证明　如果 $K \in \mathcal{K}_L(T)$ 那么由 12.2.5 得 $K \trianglelefteq \trianglelefteq L$, 且如果 $J(T) \leqslant N_L(K)$ 那么由 12.2.7 得 $K \in \mathcal{K}_L(T)$. 于是可假定

(*) $J(T) \nleqslant N_L(K) \overset{12.2.7}{=\!=} N_G(W_K)$.

现在证明这将导致矛盾.

固定符号

$$L_0 := \langle K, J(T)\rangle, \quad L^* := L_0 O_2(L), \quad L_1 := O_2(L_0)K$$

和 $S \in \mathrm{Syl}_2 G$ 使 $J(T) \leqslant S \cap L^* =: T^* \in \mathrm{Syl}_2 L^*$. 进一步, 设

$$Z := \Omega(Z(S)), \quad V^* := \langle \Omega(Z(T^*))^{L^*}\rangle.$$

(1) $O_2(L_0) \leqslant N_G(K)$.

由假设得 $K \trianglelefteq \trianglelefteq L_1$, 所以有

$$K = O^2(K) \leqslant O^2(L_1) \leqslant K.$$

这蕴含了 $K = O^2(L_1)$, 从而得到 (1).

(2) $Z \leqslant Z(T^*)$ 且 $V^* \leqslant Z(O_2(L_0))$.

注意到

$$C_S(O_2(L)) \leqslant O_2(L) \leqslant O_2(L^*) \leqslant T^*$$

且

$$\Omega(Z(T^*)) \leqslant J(T^*) = J(T) \leqslant L_0.$$

这蕴含了 $Z \leqslant Z(T^*)$ 且 $\Omega(Z(T^*)) \leqslant Z(O_2(L^*)) \cap L_0$. 因此因 $O_2(L_0) \leqslant O_2(L^*)$ 得到 $V^* \leqslant Z(O_2(L_0))$.

(3) $W_K = [Z, K] = [V^*, K]$.

因为 $O_2(K) \leqslant O_2(L_0)$ 所以由 (1) 和 (2) 得到 $[V^*, K] \leqslant Z(O_2(K))$. 由 K 在 $Z(O_2(L_0))$ 上的互素作用得 $[V^*, K] \leqslant W_K$. 因为 $|W_K| = 4$ 且由 (2) 有 $Z \leqslant V^*$, 所以只要证明 $[Z, K] \neq 1$.

假定 $[Z, K] = 1$. 那么

$$K \leqslant C_L(Z) \overset{Z}{\leqslant} N_L(S \cap L) \leqslant N_L(J(T)),$$

从而

$$J(T) \leqslant O_2(L_0) \overset{(1)}{\leqslant} N_G(K),$$

这和 (*) 矛盾. 因此 (3) 得证.

现在导出最后的矛盾. 因为 $J(T) = J(T^*)$ 且 $O_2(L) \leqslant O_2(L^*)$, 所以

$$C_G(O_2(L^*)) \leqslant C_G(O_2(L)) \leqslant O_2(L) \leqslant O_2(L^*),$$

于是 $L^* \in \mathcal{L}(T^*)$. 把 12.2.3 应用到 L^* 和 V^* 上 (替代 L 和 V).

设 E_i 是那里给出的次正规子群 $E_1, \cdots, E_r$ 中之一且 $W_i := [V^*, E_i]$. 根据 (3), 子群 E_i 和 K 都正规化 $W_K W_i$.

另一方面, 由 12.2.3(d), 因为 $|W_K W_i| \leqslant 2^4$ 所以 W_i 在 $W_K W_i$ 中至多存在两个 L^* 共轭. 因此 $K = O^2(K)$ 蕴含 $K \leqslant N_{L^*}(W_i)$, 从而 $W_K = W_i$ 或 $[W_i, K] = 1$.

第 1 种情形和 (*) 矛盾. 因此, 对 $i = 1, \cdots, r$ 有 $[W_i, K] = 1$. 这和 12.2.3(d) 一起得到

$$[J(T), V^*, K] = 1 = [V^*, K, J(T)],$$

从而由三子群引理得到 $[K, J(T)] \leqslant C^* := C_{L^*}(V^*)$. 由 12.2.2 得 $C^*J(T)$ 是 2 闭的, 所以 $K \leqslant N_G(J(T))$. 但这与 (3) 和 (*) 矛盾. □

下面关于 $J(T)$ 分支的结构的结论将在下一节结尾用到. 它独立于本节的另一个结果.

12.2.9 设 $K \in \mathcal{K}(T)$ 且 $Z_0 := \Omega(Z(J(T)))$. 那么

$$Z_0 = (Z_0 \cap Z(KJ(T)))(Z_0 \cap W_K) \text{ 且 } |Z_0 \cap W_K| = 2.$$

证明　设 $L := KJ(T)$. 由 $\mathcal{K}_2$, 可假设 $T \in \mathrm{Syl}_2 L$, 由 $\mathcal{K}_1$ 得到

(1) $L/O_2(L) \cong S_3$.

因为 $J(T) \trianglelefteq T$ 且 $|L:T| = 3$, L 中恰存在 $J(T)$ 的 3 个共轭, 从而

(2) 对每一个 $d \in L \backslash T$ 有 $L = \langle J(T), J(T)^d \rangle$.

设

$$V := \langle \Omega(Z(T))^L \rangle \ (\leqslant Z(O_2(L))).$$

那么因 $W_K \trianglelefteq L$ 而有 $W_K \cap V \neq 1$, 得到 $W_K \leqslant V$. K 在 V 上的互素作用证明了

(3) $W_K = [V, K, K] = [V, K]$ 且 $C_L(V) = O_2(L)$.

设 $A \in \mathcal{A}(T)$ 使 $A \not\leqslant O_2(L)$. 那么 (1) 和 (3) 蕴含

$$C_A(V) = A \cap O_2(L) \text{ 和 } |A/C_A(V)| = 2.$$

特别有 $|A| \leqslant |VC_A(V)|$, 从而由 A 的极大性得到

$$|A| = |C_A(V)V| = |(A \cap O_2(L))V|.$$

所以有

(4) $\mathcal{A}(O_2(L)) \subseteq \mathcal{A}(T)$ 且 $Z_0 \leqslant Z(J(O_2(L)))$.

于是 9.3.9 证明 $[Z_0, K] \leqslant V$, 从而由 (3) 得 $[Z_0, K] \leqslant W_K$. 设 $V_0 := Z_0 W_K$ 且 $X := Z_0 \cap Z_0^d$, d 同 (2) 中所定义. 因为 $W_K \cap Z(T) \neq 1$ 且 $|W_K| = 4$, 所以得到

$$|V_0 : Z_0| = |W_K : (W_K \cap Z_0)| \leqslant 2 \text{ 且 } |V_0 : K| \leqslant 4.$$

另一方面, 由 (2) 得 $X \leqslant Z(L)$ 且 $Z(L) \cap W_K = 1$, 所以

$$Z_0 = X \times (Z(T) \cap W_K),$$

从而结论得证. □

12.3　局部特征为 2 的 N 群

本节中, G 是使 $O_2(G) = 1$ 的局部特征为 2 的 ZN 群, 并且 $S \in \mathrm{Syl}_2 G$, $Z = \Omega(Z(S))$ 且 M 是 G 的包含 $N_G(J(S))$ 的 2 局部子群.

因为 $J(S)$ 是 S 的特征子群, 所以有

$$C_G(Z) \overset{Z}{\leqslant} N_G(S) \leqslant N_G(J(S)) \leqslant M,$$

从而由 Frattini 论断证得 $N_G(M) = M$. 于是

$$\text{对所有的 } x \in G \backslash M, \text{ 有 } M \neq M^x.$$

如果 M 在 G 中非强嵌入, 那么存在 $x \in G \backslash M$ 使 $M \cap M^x$ 是偶数阶的. 这导出下面的符号:

$\mathcal{T}(M)$ 是 M 的满足

(+) G 中存在 2 局部子群 L 使 $T \leqslant L$ 且 $L \nleqslant M$

的非平凡 2 子群 T 的集合.

12.3.1 M 在 G 中是强嵌入的当且仅当 $\mathcal{T}(M)$ 是空集.

证明 由 $\mathcal{T}(M)$ 的定义, 显然, 如果 $\mathcal{T}(M) = \varnothing$ 那么 M 在 G 中是强嵌入的. 现在假设 M 在 G 中是强嵌入的但 $\mathcal{T}(M) \neq \varnothing$. 那么

($'$) 对每一个 $T \in \mathcal{T}(M)$ 有 $N_G(T) \leqslant M$.

选取 $T \in \mathcal{T}(M)$ 使 $|T|$ 极大且设 $T \leqslant L$ 同 (+) 中所定义, 则有 $L \nleqslant M$.

由 ($'$) 得

$$\text{对 } T \leqslant T_0 \in \mathrm{Syl}_2 L \text{ 有 } N_{T_0}(T) \leqslant M \cap L,$$

从而由 T 的极大性得 $T = N_{T_0}(T) = T_0$. 特别有

$$O_2(L) \leqslant T_0 \leqslant M \cap L.$$

因此也有 $O_2(L) \in \mathcal{T}(M)$, 从而由 ($'$) 得到

$$L \leqslant N_G(O_2(L)) \leqslant M,$$

得到矛盾. □

鉴于在前面的章节中引进的 $J(T)$ 分支现在研究 $\mathcal{T}(M)$ 中关于它们的 Thompson 子群极大的子群 T. 确切地说, 设

$$a(T) := |A|, \ A \in \mathcal{A}(T).$$

用 $\mathcal{T}^*(M)$ 来记 $\mathcal{T}(M)$ 中在下面的意义下极大的元素 T_0 的集合:

- 如果 $T \in \mathcal{T}(M)$, 那么 $a(T) \leqslant a(T_0)$.
- 如果 $T \in \mathcal{T}(M)$, 使 $a(T) = a(T_0)$, 那么 $|J(T)| \leqslant |J(T_0)|$.
- 如果 $T \in \mathcal{T}(M)$, 使 $a(T) = a(T_0)$ 且 $|J(T)| = |J(T_0)|$, 那么 $|T| \leqslant |T_0|$.

12.3.2 对每一个 $T \in \mathcal{T}^*(M)$ 有 $N_G(J(T)) \leqslant M$.

证明 在 M 中取共轭, 可假定 $T \leqslant S$. 如果 $T = S$ 那么由 M 的选择得到 $N_G(J(T)) \leqslant M$. 如果 $T < S$ 那么

$$T < N_S(J(T)) \leqslant M \cap N_G(J(T)),$$

由 T 的极大性得到 $N_S(J(T)) \nleqslant \mathcal{T}(M)$, 所以有 $N_G(J(T)) \leqslant M$. □

12.3.3 设 $T \in \mathcal{T}^*(M)$ 且 L 是 G 的使 $J(T) \leqslant T_0 \in \mathrm{Syl}_2 L$ 且 $L \nleqslant M$ 的 2 局部子群. 那么

$$J(T)=J(T_0),\ T_0\in\mathcal{T}(M)\ \text{且}\ L\in\mathcal{L}(T_0).$$

证明　由 12.3.2,

$$T_1:=N_{T_0}(J(T))\leqslant M\cap L,$$

所以由 T 的极大性得 $J(T)=J(T_1)$, 从而有 $J(T)=J(T_0)$. 特别有 $T_0\in\mathcal{T}(M)$, 并且再次由 12.3.2 得 $J(T_0)\nleqslant O_2(L)$. 于是从 12.2.1 得 $L\in\mathcal{L}(T_0)$. □

由 12.3.3 能够用 12.2 节的结果.

12.3.4　设 L 是 G 的 2 局部子群且 $T\in\mathcal{T}^*(M)$. 假设 $T\leqslant L\nleqslant M$. 那么 $L\in\mathcal{L}(T)$, 特别有 $T\in\mathrm{Syl}_2L$ 且 $\mathcal{K}_L(T)\neq\varnothing$.

证明　设 $T\leqslant T_0\in\mathrm{Syl}_2L$. 那么 12.3.3 证明了 $T_0\in\mathcal{T}(M)$ 且 $L\in\mathcal{L}(T_0)$. T 的极大性蕴含 $T_0=T$. 其余的结论可从 12.2.5 得到. □

现在用到 267 页引入的集合 $\mathcal{K}_0(T)$. 对 $T\in\mathcal{T}^*(M)$, 设 $\mathcal{K}_{G\setminus M}(T)$ 是 $\mathcal{K}_0(T)$ 的使

$$K\nleqslant M\ \text{且}\ O_2(\langle K,T\rangle)\neq 1$$

的元素的集合.

12.3.5　对所有的 $T\in\mathcal{T}^*(M)$ 有 $\mathcal{K}_{G\setminus M}(T)\neq\varnothing$.

证明　设 $T\in\mathcal{T}^*(M)$. 由 12.3.4, 存在 $L\in\mathcal{L}(T)$ 使 $L\nleqslant M$. 由 Frattini 论断得到

$$L=N_L(J(T))J(L),$$

所以由 12.3.2 得 $J(L)\nleqslant M$. 因此由 12.2.3 和 12.2.5, 存在 $K\in\mathcal{K}_L(T)$ 使 $K\nleqslant M$.

还需证明 $K\in\mathcal{K}_0(T)$. 设 $\widehat{L}:=N_G(W_K)$ 且 $J(T)\leqslant T_0\in\mathrm{Syl}_2\widehat{L}$. 那么因 $K\leqslant L$ 但 $K\nleqslant M$ 有 $\widehat{L}\nleqslant M$. 因此 12.3.3 蕴含 $J(T)=J(T_0)$, 从而 $K\in\mathcal{K}_0(T)$. □

12.3.6　唯一性定理　设 $T\in\mathcal{T}^*(M)$ 且 $K\in\mathcal{K}_{G\setminus M}(T)$. 那么 $KJ(T)$ 包含在 G 的唯一的极大 2 局部子群 L 中, 并且 $K\trianglelefteq\trianglelefteq L$ 且 $T\in\mathrm{Syl}_2\,L$.

证明　设 $\mathcal{L}$ 是 G 的包含 $KJ(T)$ 的 2 局部子群的集合. 那么因 $W_K\neq 1$ 且 $KJ(T)\leqslant N_G(W_K)$ 而有 $\mathcal{L}$ 非空. 注意因为 $K\nleqslant M$ 所以 $\mathcal{L}$ 中的子群不包含在 M 中.

设 $L\in\mathcal{L}$ 且 $J(T)\leqslant T_0\in\mathrm{Syl}_2L$. 由此从 12.3.3 得到

(1) $K\in\mathcal{K}(T_0)$ 且 $L\in\mathcal{L}(T_0)$,

所以 12.2.5 蕴含

(2) 对所有的 $L\in\mathcal{L}$ 有 $K\trianglelefteq\trianglelefteq L$.

替代 $\mathcal{U}$ 和 A, 将证明 $\mathcal{L}$ 和 K 满足 121 页 6.7.3 的假设 (1)~(3). 同 6.7.3 中那样, 设

$$\Sigma_L:=\{K^g|g\in G,K^g\trianglelefteq\trianglelefteq L\}\quad(L\in\mathcal{L}).$$

那么 (2) 蕴含假设 6.7.3(2).

设 $\widetilde{L} \in \mathcal{L}$, $K^g \in \Sigma_{\widetilde{L}}$ 且 $K^g \leqslant L$. 因为 $J(T) \leqslant \widetilde{L}$, 有 $K^g \trianglelefteq\trianglelefteq \langle K^g, J(T)\rangle$, 从而 12.2.8 蕴含 $K^g \trianglelefteq\trianglelefteq L$. 这是假设 6.7.3(2).

对于假设 6.7.3(3) 的验证, 设

$$\Sigma := \Sigma_L \cap \Sigma_{\widetilde{L}} \text{ 且 } X := \langle \Sigma \rangle.$$

那么 $K \in \Sigma$ 从而因 $X \leqslant L$ 有 $K \trianglelefteq\trianglelefteq X$. 特别有

$$1 \neq O_2(K) \leqslant O_2(X).$$

从而 $N_G(O_2(X))$ 是 G 的 2 局部子群. 因为 $J(T)$ 由共轭作用在 Σ_L 和 $\Sigma_{\widetilde{L}}$ 上, 所以有

$$J(T) \leqslant N_G(X) \leqslant N_G(O_2(X)),$$

从而 $N_G(O_2(X)) \in \mathcal{L}$. 这证明了假设 6.7.3(3).

于是由 6.7.3 证得 $\mathcal{L}$ 包含唯一的极大元素 L. 由 $\mathcal{K}_{G\setminus M}(T)$ 的定义得

$$O_2(\langle K, T\rangle) \neq 1,$$

也有 $T \leqslant L$. 于是从 12.3.4 得到 $T \in \mathrm{Syl}_2 L$. □

12.3.7 设 L, K 和 T 同 12.3.6 中所定义, $T \leqslant S$ 且设

$$Z_0 := \Omega(Z(J(T))) \text{ 和 } Z := \Omega(Z(S)).$$

那么 $Z_0 \cap W_K \neq 1$ 且下面之一成立:

(a) $Z = Z_0 \cong C_2$.

(b) $Z = Z_0 \cong C_2 \times C_2$ 且 $T = S$.

(c) $\Omega(Z(T)) = Z_0 \cong C_2 \times C_2$ 且 $|N_G(Z_0) : C_L(Z_0)| = 2$.

证明 因为 $T \in \mathrm{Syl}_2 L$ 且 L 是 2 局部子群, 所以得到 $Z \leqslant Z(T)$, 即

(1) $Z \leqslant Z_0$.

设 $Z_K := C_{Z_0}(K)$. 12.2.9 蕴含

(2) $|Z_0 : Z_K| = 2$ 且 $Z \neq Z_K$.

后者是因为由假设知 $C_G(Z)$ 是 2 闭的但 $KJ(T)$ 不是 2 闭的. 如果 $Z_0 \cong C_2$, 那么 (a) 成立. 于是可假定

(3) $|Z_0| \geqslant 4$.

首先处理情形

$$N_G(J(T)) \leqslant L.$$

那么 $N_S(J(T)) = T$ 从而 $S = T$. 因此 L 具有和 M 相同的性质. 特别, 因 $M \neq L$ 而有 $T \in \mathcal{T}^*(L)$.

根据 12.3.5(互换 L 和 M 的角色), 存在 $F \in \mathcal{K}_{G\setminus L}(T)$. 设 $Z_F := C_{Z_0}(F)$. 关于 Z_K 有

(4) $|Z_0 : Z_F| = 2$ 且 $Z \neq Z_F$.

如果 $Z_K \cap Z_F \neq 1$ 那么由 L 的唯一性得到

$$\langle F, K, J(S)\rangle \leqslant N_G(Z_K \cap Z_F) \leqslant L,$$

这和 $F \not\leqslant L$ 矛盾. 于是有

$$Z_K \cap Z_F = 1,$$

从而 (2)~(4) 蕴含

$$Z_0 \cong C_2 \times C_2 \text{ 且 } Z_K \cong Z_F \cong C_2.$$

如果 (b) 不成立, 那么 (1),(2) 和 (4) 表明 Z 的阶为 2, 并且因为 $C_G(Z)$ 是 2 闭的得到 Z 既不和 Z_K 共轭又不和 Z_F 共轭. 因 $Z < Z_0 \trianglelefteq S$ 这蕴含了对某个 $x \in S$ 有 $Z_K^x = Z_F$ 且

$$\langle F, K^x, J(S)\rangle \leqslant N_G(Z_F).$$

另一方面 $x \in S \leqslant L$, 于是 L 的唯一性证明了

$$\langle F, K^x, J(S)\rangle \leqslant L^x = L.$$

这和 $F \not\leqslant L$ 矛盾.

最后还需要考虑情况

$$N_G(J(T)) \not\leqslant L.$$

设 $g \in N_G(J(T))\setminus L$. 如果 $Z_K \cap Z_K^g \neq 1$, 那么由 L 的唯一性得到

$$KJ(T) \leqslant N_G(Z_K \cap Z_K^g) \leqslant L,$$

类似地, 用 (K^g, M^g, L^g) 替换 (K, M, L) 得到

$$N_G(Z_K \cap Z_K^g) \leqslant L^g.$$

这证明了 $KJ(T) \leqslant L^g$, 从而 $L^g = L$. 因为 L 是极大 2 局部子群所以得到 $g \in L$, 矛盾.

因此 $Z_K \cap Z_K^g = 1$, 从而同上面一样由 (2) 得到

$$Z_0 \cong C_2 \times C_2.$$

下面证明

(5) $Z_0 \leqslant Z(T)$.

否则存在 $t \in T$ 使 $[Z_0, t] \neq 1$, 特别有 $Z < Z_0$. 同上面, Z_K, Z_K^g 和 Z 是 Z_0 中 3 个阶为 2 的子群, 且 Z 既不和 Z_K 共轭也不和 Z_K^g 共轭. 由此得到 $Z_K^t = Z_K^g$ 从而

$$tg^{-1} \in N_G(Z_K) \leqslant L,$$

这和 $g \notin L$ 矛盾. 因此证得 (5).

从 $\Omega(Z(T)) \leqslant Z_0$ 得到

$$Z_0 = \Omega(Z(T)),$$

由 L 的唯一性得到

$$C_G(Z_0) \leqslant C_G(Z_K) \leqslant L.$$

如果 $Z = Z_0$, 那么 $S = T$ 从而得到 (b).

假定 $Z \neq Z_0$. 那么 $T < S$, 则有 $T < N_S(Z_0)$, 从而因 Z 在 $N_G(Z_0)$ 中既不和 Z_K 共轭也不和 Z_K^g 共轭得到

$$|N_S(Z_0)/C_S(Z_0)| = 2 = |N_G(Z_0)/C_G(Z_0)|.$$

这就得到了 (c). □

12.3.8 设 $T \in \mathcal{T}^*(M)$ 且 $K \in \mathcal{K}_{G\setminus M}(T)$. 那么 K 正规于 $\langle K, T\rangle$.

证明 在 M 中取共轭后, 可假设 $T \leqslant S$. 唯一性定理 (见 12.3.6) 证明了 $\langle K, T\rangle$ 包含在唯一的极大 2 局部子群 L 中且 $T \in \mathrm{Syl}_2 L$. 并且 12.3.7 蕴含

$$Z(T) \cap W_K \neq 1.$$

于是从 12.2.6 得到结论. □

12.3.9 设 $T \in \mathcal{T}^*(M)$. 那么存在两个不同的 $J(T)$ 分支 $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(T)$, 使对 $P_i := \langle K_i, T\rangle, i = 1, 2$, 下面的结论成立:

(a) $C_G(O_2(P_i)) \leqslant O_2(P_i)$.

(b) $T \in \mathrm{Syl}_2 P_i$.

(c) $P_i/O_2(P_i) \cong S_3$.

(d) $[\Omega(Z(T)), P_i] \neq 1$.

(e) $O_2(\langle P_1, P_2\rangle) = 1$.

并且 P_i 包含在 G 的唯一极大 2 局部子群 L_i 中且 $T \in \mathrm{Syl}_2 L_i$.

证明 由 12.3.5, 存在 $K_1 \in \mathcal{K}_{G\setminus M}(T)$, 从而根据唯一性定理 (见 12.3.6), P_1 包含在 G 的唯一极大 2 局部子群 L 中. 另外 $T \in \mathrm{Syl}_2 L$, 从而也有 $T \in \mathrm{Syl}_2 P_1$. 由此得到

$$C_G(O_2(P_1)) \leqslant C_G(O_2(L)) \leqslant O_2(L) \leqslant O_2(P_1).$$

从 12.3.7, 得到 $Z(T) \cap W_{K_1} \neq 1$. 这证明了 $[\Omega(Z(T)), K_1] \neq 1$, 并且由 12.3.8 得 K_1 正规于 P_1, 即有 $P_1 = K_1T$. 于是对 $i=1$, (a)~(d) 成立.

首先假定 $N_G(T) \not\leqslant L$. 设 $g \in N_G(T)\backslash L$ 且 $K_2 := K_1^g$. 那么 P_1 和 P_2 共轭, 所以 P_2 也具有性质 (a)~(d). 另外 L^g 是 G 的包含 P_2 的唯一极大 2 局部子群. 因此 (e) 成立, 否则有 $L = L^g$ 从而 $g \in L$.

现在假设 $N_G(T) \leqslant L$. 那么 $T \in \mathrm{Syl}_2 G$, 在 M 中取共轭之后, 可假设

$$T = S.$$

从 12.3.7 得到 $Z = Z_0$, Z_0 同 12.3.7 中的一样. 所以

$$N_G(J(S)) \leqslant N_G(Z_0) \overset{Z}{\leqslant} N_G(S) \leqslant L^{①}.$$

因此 L 具有和 M 相同的性质. 同 12.3.7 的证明中那样, 存在 $K_2 \in \mathcal{K}_{G\backslash L}(T)$. 同上面一样, 用 L 代替 M, 对 P_2 性质 (a)~(d) 成立.

对于 (e) 的证明, 假设 $O_2(\langle P_1, P_2\rangle) \neq 1$. 那么对 K_1, 由唯一性定理证得 $P_2 \leqslant L$. 这和 $K_2 \not\leqslant L$ 矛盾. □

现在运用 10.3 节由融合方法得出的结果.

12.3.10　设 $T \in \mathcal{T}^*(M)$. 那么 G 中存在两个不同的极大 2 局部子群 P_1 和 P_2 使 $T \in \mathrm{Syl}_2 P_i, i = 1, 2$ 且有

$$P_1 \cong P_2 \cong S_4 \text{ 或 } P_1 \cong P_2 \cong S_4 \times C_2.$$

证明　设 $P_1 \leqslant L_1$ 和 $P_2 \leqslant L_2$ 同 12.3.9 中所定义, 所以特别有

$$T \in \mathrm{Syl}_2 L_1 \cap \mathrm{Syl}_2 L_2.$$

从 10.3.11 得知 P_i 具有所要的结构. 下面仅需证明对 $i = 1, 2$ 有 $P_i = L_i$. 固定 i, 用符号

$$(L, K, P) \text{ 代替 } (L_i, K_i, P_i).$$

那么

$$Z(T) \leqslant O_2(L) \leqslant O_2(P) \leqslant T \in \mathrm{Syl}_2 L,$$

且还有 $\langle Z(T)^P \rangle = O_2(P)$. 由此得到

$$O_2(L) = O_2(P).$$

因为 $|O_2(L)| \leqslant 8$, 由 12.2.3 和 12.3.6 得 K 是 L 唯一的 $J(T)$ 分支. 因此再次由 12.2.3 和 12.2.5, W_K 正规于 L 且 $|O_2(L)/W_K| \leqslant 2$. 于是由 140 页 8.2.2 证得 $C_L(W_K)$ 是 2 群, 所以 $C_L(W_K) = O_2(L)$. 于是 $L/C_L(W_K) \cong S_3$ 蕴含 $L = P$. □

---

① 运用和 257 页的 Z 等价的条件.

现在能够证明本章引言中所述的定理 1 和定理 3[①].

定理 3 的证明 设 $H := O^2(G)$, M 同本节开始所介绍的. 假设 M 在 G 中非强嵌入. 那么 12.3.1 蕴含 $T(M) \neq \varnothing$. 于是也有 $T^*(M) \neq \varnothing$, 从而可运用 12.3.10. 设 P_1, P_2, T 同那里所述且

$$M_i := H \cap P_i \quad (i = 1, 2).$$

进而, 对 $i = 1, 2$ 设

$$Z_i := Z(P_i),$$
$$O_i := O_2(O^2(P_i)) \ (\leqslant H \cap T) \text{ 且}$$
$$T_0 := \langle Q_1, Q_2 \rangle.$$

那么 Q_1 和 Q_2 是两个阶为 4 的初等交换群, 并且因 $Q_1 \neq Q_2$ 它们相交于一个 2 阶子群中. 因此 T_0 是 8 阶二面体群. 因为 T_0 在 M 中, 所以对 $i = 1, 2$ 有

$$M_i \cong S_4 \text{ 或 } M_i = P_i.$$

首先假定 $M_i \cong S_4$, 且设 L 是 H 的包含 M_i 的极大 2 局部子群. 那么因为 $N_G(Q_i) = P_i$ 而有

$$N_{O_2(L)}(Q_i) \leqslant O_2(L) \cap P_i \cap H = O_2(L) \cap M_i = Q_i.$$

由此得到 $Q_i = O_2(L)$, 从而 $L = M_i$.

因此为了证明定理 3 只需要证明 $M_1 \cong S_4 \cong M_2$. 下面将证明另一种情形

$$M_i = P_i \cong C_2 \times S_4 \quad (i = 1, 2)$$

导致矛盾. 于是从现在起假设

$$T \leqslant H.$$

设 $\langle z \rangle := Z(T_0)$ 且 $\langle z_i \rangle := Z_i$. 那么

(1) $O_2(P_i) = \langle z_i \rangle \times Q_i$, $Z(T) = \langle z \rangle \times \langle z_i \rangle$ 且 $\langle z \rangle = Q_1 \cap Q_2$.

(2) $\mathcal{A}(T) = \{O_2(P_1), O_2(P_2)\}$.

(3) $O_2(P_1) \cup O_2(P_2) = \{x \in T | x^2 = 1\}$.

并且 z_i 是 P_i 中非平方的元素[②]. 由 P_i 的极大性得到 $C_G(z_i) = P_i$. 因此 z_i 在 G 中也是非平方的. 另一方面, z 在 T_0 中是平方的, 故因 T_0 中的所有对合 (在 $\langle P_1, P_2 \rangle$ 中) 和 z 共轭, 从而它们都是平方的. 由此得到

(4) $z_i^G \cap T_0 = \varnothing$, $i = 1, 2$.

---

① 定理 2 已经在 12.2 节中得到证明.

② 就是说, P_i 中不存在元素 x 使 $z_i = x^2$.

设 $S \in \mathrm{Syl}_2 G$ 使

$$T \leqslant S \cap H.$$

如果 $T = S \cap H$, 那么 $T \in \mathrm{Syl}_2 H$ 从而由 Thompson 转移引理 (用到 H 上) 证得 z_i 和 T_0 的一个对合共轭. 这和 (4) 矛盾. 于是有

$$T < S \cap H,$$

特别 $T < N_S(T)$. P_i 的极大性和 $P_1 \neq P_2$ 蕴含了 $N_S(T)$(由共轭) 传递地作用在下面的每一个集合:

$$\{Z_1, Z_2\}, \quad \{Q_1, Q_2\}, \quad \mathcal{A}(T)$$

上, 且在每一种情形 T 都是作用的核. 由此得 $|N_S(T)/T| = 2$ 且

(5) 对每一个 $x \in N_S(T) \backslash T$ 有 $\Omega(C_T(x)) = \langle z \rangle$.

特别有

$$\langle z \rangle = \Omega(Z(S)) = Z.$$

因为 $\mathcal{A}(N_S(T))$ 的每一个元素的阶至少是 8, 所以 (2) 和 (5) 蕴含了

$$T = J(T) = J(N_S(T)),$$

从而 $T = J(S)$. 特别有 $T \trianglelefteq S$. 因此有

(6) $|S : T| = 2$, $S \in \mathrm{Syl}_2 H$ 且 $J(S) = J(T) = T$.

首先假设 $S \backslash T$ 中存在对合 t. 设 $g \in G$ 使

$$C_S(t) \leqslant C_{S^g}(t) \in \mathrm{Syl}_2 C_G(t).$$

如果 $C_T(t) = Z$, 那么 $C_S(t) = Z(t) \cong C_2 \times C_2$; 从而由 5.3.10 得 S 是二面体或半二面体群. 这和 S 中存在 8 阶初等交换子群矛盾.

已证明了 $Z < C_T(t)$. 由 (5), z 在 $C_T(t)$ 中是平方元, 从而在 S^g 中也是平方元. 因为 $|S^g : T^g| = 2$, 得到

$$z \in T^g.$$

于是把 (3) 运用到 T^g 上得到存在子群 $A \in \mathcal{A}(T^g)$ 使 $|A| = 8$ 且 $z \in A$. 因此 Z 蕴含 $A \leqslant C_G(Z) \leqslant N_G(S)$, 所以由 (6) 得到

$$A \in \mathcal{A}(T).$$

另一方面, 由 Thompson 转移引理证得 t 和 T 中的一个对合共轭. 于是由 (3), $C_G(t)$ 中存在 8 阶初等交换子群 B, 从而可假设 $B \leqslant S^g$. 再次从 (6) 得到 $B \in \mathcal{A}(T^g)$. 因此 (2) 蕴含 $|B \cap A| \geqslant 4$ 从而

$$B \cap A \leqslant C_T(t),$$

这和 (5) 矛盾.

已证明了 $S\backslash T$ 中没有对合. 现在确定焦子群 $S\cap H'$. 因为 $H=O^2(H)$, 所以从 127 页 7.1.3 和 (6) 得到

(7) $S=S\cap H'=\langle y^{-1}y^g|y\in S,\ y^g\in S,\ g\in G\rangle$.

设 $y,y^g\in S$, $g\in G$. 如果 y 和 y^g 都在 T 中, 那么也有 $y^{-1}y^g\in T$. 假设 $y\notin T$. 那么 $o(y)>2$, 由 (5) 证得 $\Omega(\langle y\rangle)=Z$. 或者也有 $y^g\notin T$ 从而由相同的论证得到 $\Omega(\langle y\rangle^g)=Z$, 或者 $y\in T$ 而因 z 是 T 中仅有的平方元素再次有 $\Omega(\langle y\rangle^g)=Z$.

已证得

$$\text{如果 } o(y)>2, \text{ 那么 } \Omega(\langle y\rangle)=Z=\Omega(\langle y^g\rangle).$$

于是在这种情形有 $Z=Z^g$, 从而由 Z 得 $g\in N_G(S)$. 因为 $|S:T|=2$, 所以再次得到 $y^{-1}y^g\in T$. 因此 (7) 蕴含 $S=S\cap H'\leqslant T$, 得到矛盾. □

定理 1 的证明 因为定理 2 在 12.1 节结尾已经得到证明, 所以可假设 HZ 具有局部特征 2. 显然 HZ 也是 ZN 群. 于是可运用定理 3 到 HZ 上.

如果 HZ 有强嵌入子群, 那么定理 1 的 (a) 成立. 在另一种情形, H 包含同构于 S_4 的极大 2 局部子群. 将证明定理 1 的情形 (b) 成立.

有

$$O_2(P)\cong C_2\times C_2 \text{ 且 } P=N_H(O_2(P)).$$

设 D 是 P 的 Sylow 2 子群, 则 D 是 8 阶二面体群. 在 H 中取共轭后, 可假设

$$D\leqslant S\cap H=:R.$$

设

$$Z^*:=\Omega(Z(R)).$$

那么 $Z^*\leqslant O_2(P)$ 且存在 $t\in O_2(P)$ 使

$$O_2(P)=Z^*\times\langle t\rangle\cong C_2\times C_2.$$

由此得到

$$C_R(t)=C_R(O_2(P))=O_2(P),$$

从而 92 页 5.3.10 蕴含 R 是二面体群或半二面体群. 因此定理 1 的 (b) 成立. □

参 考 文 献

书和专著

[1] Aschbacher, M.: *Finite Group Theory.* Cambridge Univ. Press, Cambridge 1986.

[2] Aschbacher, M.: *Sporadic Groups.* Cambridge Univ. Press, Cambridge 1994.

[3] Bender, H., Glauberman, G.: *Local Analysis for the Odd Order Theorem*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1994.

[4] Burnside, W.: *Theory of Groups of Finite Order*, 2nd edn., Cambridge 1991; Dover Publications, New York 1955.

[5] Carter, R. W.: *Simple Groups of Lie Type.* J. Wiley & Sons, New York 1972.

[6] Dickson, L. E.: *Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory*, Leipzig 1901; Dover Publications, New York, 1958.

[7] Delgado, A., Goldschmidt, D., Stellmacher, B.: *Groups and Graphs: New Results and Methods.* DMV-Seminar, Bd. 6. Birkhäuser Verlag, Basel 1985.

[8] Doerk, K., Hawkes, T.: *Finite Soluble Groups.* deGruyter, Berlin 1992.

[9] Feit, W.: *Characters of Finite Groups.* Benjamin, New York 1972.

[10] Gorenstein, D.: *Finite Simple Groups.* Plenum Press, New York 1982.

[11] Gorenstein, D.: *The Classification of Finite Simple Groups.* Plenum Press, New York 1983.

[12] Gorenstein, D.: *Finite Groups.* Harper & Row, New York 1968.

[13] Huppert, B.: *Endliche Gruppen I.* Springer-Verlag, Berlin 1967.

[14] Huppert, B., Blackburn, N.: *Finite Groups* II, III. Springer-Verlag, Berlin 1982.

[15] Jordan, C.: *Traité des substitutions et dés equationes âlgébriques.* Paris 1870.

[16] Schmidt, R.: *Subgroup Lattices of Groups.* de Gruyter, Berlin 1994.

[17] Suzuki, M.: *Group Theory* I, II. Springer-Verlag, Berlin 1982, 1986.

[18] Wielandt, H.: *Finite Permutation Groups.* Academic Press, New York 1964.

[19] Zassenhaus, H.: *Lehrbuch der Gruppentheorie.* Leipzig 1937.

期刊文章

[20] Alperin, J. L.: Sylow intersections and fusion, *J. Algebra* **6** (1967), 222–41

[21] Alperin, J. L., Gorenstein, D.: Transfer and fusion in finite groups, *J. Algebra* **6** (1967), 242–55.

[22] Alperin, J. L., Brauer, R., Gorenstein, D.: Finite groups with quasi-dihedral and whreathed Sylow 2-subgroups, *Trans. Amer, Math. Soc.* **151** (1970), 1–261.

[23] Baer, R.: Groups with Abelian central quotient groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **44** (1938), 357–86.

[24] Baer, R.: Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen, *Math. Ann.* **133** (1957), 256–76.

[25] Baumann, B.: Überdeckung von Konjugiertenklassen endlicher Gruppen, *Geometriae Dedicata* **5** (1976), 295–305.

[26] Baumann, B.: Über endliche Gruppen mit einer zu $L_2(2^n)$ ismorphen Faktorgruppe, *Proc. AMS* **74** (1979), 215–22.

[27] Bender, H.: Über den größten p'-Normalteiler in p-auflösbaren Gruppen, *Archiv* **18** (1967), 15–16.

[28] Bender, H.: On groups with Abelian Sylow 2-subgroups, *Math. Z.* **117** (1970), 164–76.

[29] Bender, H.: Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festläßt, *J. Alg.* **17** (1971), 527–54.

[30] Bender, H.: A group theoretic proof of Burnside's $p^a q^b$-theorem, *Math. Z.* **126** (1972), 327–38.

[31] Bender, H.: Goldschmidt's 2-signalizer functor-theorem, *Israel J. Math.* **22** (1975), 208–13.

[32] Brauer, R., Suzuki, M.: On finite groups of even order whose 2-Sylow subgroup is a quaternion group, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **45** (1959), 175–9.

[33] Brodkey, J.S.: A note on finite groups with an Abelian Sylow group, *Proc. AMS* **14** (1963), 132–3.

[34] Burnside, W.: On groups of order $p^a q^b$, *Proc. London Math. Soc.* (2)**1** (1904), 388–92.

[35] Cameron, P.J.: Finite permutation groups and finite simple groups, *Bull. London Math. Soc.* **13** (1981), 1–22.

[36] Carter, R.W.: Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups, *Math. Z.* **75** (1960/61), 136–9.

[37] Cauchy, A.: Memoire sur le nombre des valeurs on' une function peut acquerir, *ŒUVRES II*, **1**, 64–90.

[38] Chermak, A., Delgado, A.L.: A measuring argument for finite groups, *Proc. AMS* **107** (1989), 907–14.

[39] Clifford, H.: Representations induced in an invariant subgroup, *Ann. of Math.* **38** (1937), 533–50.

[40] Dress, A.W.M., Siebeneicher, Ch., Yoshida, T.: An application of Burnside rings in elementary finite group theory, *Aduances in Math.* **91** (1992), 27–44.

[41] Dress, A.W.M.: Still another proof of the existence of Sylow p-subgroups, *Beiträge zur Geometrie und Algebra* **35** (1994), 147–8.

[42] Euler, L.: *Opera Omnia* I 2. Teubner 1915.

[43] Feit, W., Thompson, J. G.: Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.* **13** (1963), 775–1029.

[44] Fitting, H.: Beiträge zur Theorie der endlichen Gruppen, *Jahres-bericht DMV* **48** (1938), 77–141.

[45] Frattini, G.: Intorno alla generazione dei gruppi di operanzoni, *Rend. Atti. Acad. Lincei* **1** (1885), 281–5, 455–77.

[46] Frobenius, G.: Über auflösbare Gruppen IV, *Sitzungsberichte der königl. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin* (1901), 1223-25; or in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III, Springer (1968), 189–209.

[47] Frobenius, G.: Über auflösbare Gruppen V, *Sitzungsberichte der königl. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin* (1901), 1324–29; or in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III, Springer (1968), 204.

[48] Gaschütz, W.: Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen, *J. reine angew. Math.* **190** (1952), 93–107.

[49] Glauberman, G.: Central elements in core-free groups. *J. Alg.* **4** (1966), 403–20.

[50] Glauberman, G.: A characteristic subgroup of a p-stable group, *Canadian J. Math.* **20** (1968), 1101–35.

[51] Glauberman, G.: Failure of factorization in p-solvable groups, *Quart. J. Math. Oxford* II. Ser. **24** (1973), 71–7.

[52] Glauberman, G.: On solvable signalizer-functors in finite gorups, *Proc. London Math. Soc.* III. Ser. **33** (1976), 1–27.

[53] Glauberman, G.: *Factorizations in local subgroups of finite groups.* Regional Conference in Mathematics, Vol. 33 (1977).

[54] Goldschmidt, D. M.: A group-theoretic proof of the $p^a q^b$ theorem for odd primes, *Math. Z.* **113** (1970), 373–5.

[55] Goldschmidt, D. M.: 2-signalizer functors on finite groups, *J. Alg.* **21** (1972), 321–40.

[56] Goldschmidt, D. M.: Solvable functors on finite groups, *J. Alg.* **21** (1972), 341–51.

[57] Goldschmidt, D. M.: Strongly closed 2-subgroups of finite groups, *Ann. of Math.* **99** (1974), 70-117.

[58] Goldschmidt, D. M.: Automorphisms of trivalent graphs, *Ann. of Math.* **111** (1980), 377–404.

[59] Gorenstein, D., Walter, J.: The characterization of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, *J. Alg.* **2** (1964), 354–93.

[60] Gorenstein, D.: On centralizers of involutions in finite groups, *J. Alg.* **11** (1969), 243–77.

[61] Gorenstein, D., Lyon, R.: Nonsolvable groups with solvable 2-local subgroups, *J. Alg.* **38** (1976), 453–522.

[62] Grün, O.: Beiträge zur Gruppentheorie I, *J. reine angew. Math.* **174** (1935), 1–14.

[63] Hall, P.: A note on soluble groups, *J. London Math. Soc.* **3** (1928), 98–105.

[64] Hall, P.: A contribution to the theory of groups of prime-power order, *Proc. London Math. Soc.* (2) **36** (1934), 29–95.

[65] Hall, P.: A characteristic property of soluble groups, *J. London Math. Soc.* **12** (1937), 188–200.

[66] Hall, P.: On the Sylow systems of a soluble group, *Proc. London Math. Soc.* (2) **43** (1937), 198–200.

[67] Hall, P., Higman, P.: The p-length of a p-soluble group and reduction theorems for Burnside's problem, *Proc. London Math. Soc.* **7** (1956), 1–42.

[68] Hölder, O.: Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen, *Math. Ann.* **34** (1889), 26–56.

[69] Hölder, O.: Die Gruppen der Ordnung p^3, pq^2, pqr, p^4, *Math. Ann.* **43** (1893), 301–412.

[70] Ito, N.: Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen, *Math. Z.* **62** (1955), 400–1.

[71] Iwasawa, K.: Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **23** (1941), 1–4.

[72] Janko, Z.: A new finite simple group with Abelian 2-subgroups, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **53** (1965), 657–8.

[73] Janko, Z.: Nonsolvable groups all of whose 2-local subgroups are solvable, *J. Alg.* **21** (1972), 458–511.

[74] Knoche, H.G.: Über den Frobeniusschen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen, *Math. Z.* **55** (1951), 71–83.

[75] Lagrange, J. L.: Reflexions sur la résulotion algébriques de equations, *Œuvres* t. **3**, Gauthier-Villans (1938), 205–421.

[76] Maschke, H.: Über den arithmetischen Charakter der Coeffizienten der Substitutionen endlicher linearer Gruppen, *Math. Ann.* **50** (1898), 482–98.

[77] Mathieu, E.: Memoire sur le nombre de valeurs que peut acquerir une fonction quand on y permut ses variables de toutes les manières possibles, *Crelle J.* **5** (1860), 9–42.

[78] Mathieu, E.: Memoire sur l'étude des fonctions de plusieures quantités, sur la manière de les formes et sur les substitutions qui les laissent invariables, *Crelle J.* **6** (1861), 241–323.

[79] Mathieu, E.: Sur la fonction cinq fois transitive des 24 quantités, *Crelle J.* **18** (1873), 25–46.

[80] Matsuyama, H.: Solvability of groups of order $2^a p^b$, *Osaka J. Math.* **10** (1973), 375–8.

[81] O'Nan, M.E.: Normal structure of the one-point stabilizer of a doubly-transitive permutation group, *Trans. Am. Soc.* **217** (1975), 1–74.

[82] Schur, J.: Untersuchungen über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochen lineare Substitutionen, *J. reine u. angew. Math.* **132** (1907), 85–137.

[83] Smith, F.: Finite simple groups all of whose 2-local subgroups are solvable, *J. Alg.* **34** (1975), 481–520.

[84] Solomon, R.: On finite simple groups and their classification, *Notices AMS* **42** (1995), 231–9.

[85] Stellmacher, B.: An analogue to Glauberman's ZJ-theorem, *Proc. Am. Math. Soc.* **109** No. 4 (1990), 925–9.

[86] Stellmacher, B.: On Alperin's fusion theorem, *Beitr. Alg. Geom.* **35** (1994), 95–9.

[87] Stellmacher, B.: An application of the amalgam method: The 2-local structure of N-groups of characteristic 2 type, *J. Alg.* **190** (1997), 11–67.

[88] Stellmacher, B.: A characteristic subgroup for Σ_4-free groups, *Israel J. Math.* **94** (1996), 367–79.

[89] Sylow, L.: Théorèmes sur les groupes de substitutions, *Math. Ann.* **5** (1872), 584–94.

[90] Thompson, J. G.: Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **45** (1959), 578–81.

[91] Thompson, J. G.: Normal p-complements for finite groups, *Math. Z.* **72** (1960), 332–354.

[92] Thompson, J. G.: Normal p-complements for finite groups, *J. Algebra* **1** (1964), 43–6.

[93] Thompson, J. G.: Fixed points of p-groups acting on p-groups, *Math. Z.* **80** (1964), 12–13.

[94] Thompson, J. G.: Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable I-VI, *Bull. AMS* **74** (1968), 383–437; *Pacific J. Math.* **33** (1970), 451–536; **39** (1971), 483-534; **48** (1973), 511–92; **50** (1974), 215-97; **51** (1974), 573–630.

[95] Timmesfeld, F.: A remark on Thompson's replacement theorem and a consequence, *Arch. Math.* **38** (1982), 491–9.

[96] Wielandt, H.: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen, *Math. Z.* **45** (1939), 209–44.

[97] Wielandt, H.: Ein Beweis für die Existenz der Sylowgruppen, *Arch. Math.* **10** (1959), 401–2.

[98] Wielandt, H.: Kriterium für Subnormalität in endlichen Gruppen, *Math. Z.* **138** (1974), 199–203.

[99] Wielandt, H.: *Mathematische Werke*, Bd. 1, de Gruyter 1994.

[100] Witt, E.: Treue Darstellung Liescher Ringe, *J. reine angew. Math.* **177** (1938), 152–60.

[101] Witt, E.: Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **12** (1937), 256–64.

[102] Zassenhaus, H.: Über endliche Fastkörper, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **11** (1935), 187–220.

附　录

在这个附录中，给出在第 10 章和第 12 章中提到的结论.

设 G 是一个群. 用 $Z^*(G)$ 记 $Z(G/O_{2'}(G))$ 在 G 中的逆像.

Brauer, Suzuki[32]　假设 G 的 Sylow 2 子群是四元数群. 那么 $Z^*(G)/O_{2'}(G) \cong C_2$①.

Glauberman (Z^* 定理)[49]　设 S 是 G 的 Sylow 2 子群. 那么

$$x \in Z^*(G) \Leftrightarrow x^G \cap C_S(x) = \{x\}.$$

Gorenstein, Walter[59]　假设 $O_{2'}(G) = 1$ 且 G 的 Sylow 2 子群是二面体群. 那么 $F^*(G)$ 同构于

$$PSL_2(q),\quad q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2), \text{ 或 } A_7.$$

Alperin, Brauer, Gorenstein[22]　假设 G 是单群且 G 的 Sylow 2 子群是半二面体群. 那么 G 同构于

$$PSL_3(q),\ q \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4),\ PSU_3(q), q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4), \text{ 或 } M_{11}.$$

Bender[29]　假设 G 有强嵌入子群②. 那么下面结论之一成立:

(i) G 的 Sylow 2 子群是循环群或四元数群.

(ii) G 有正规列 $1 \leqslant M \leqslant L \leqslant G$, 使 M 和 G/L 是奇数阶的且 L/M 同构于

$$PSL_2(2^n),\ Sz(2^{2n-1}) \text{ 或 } PSU_3(2^n) (n \geqslant 2).$$

Goldschmidt[57]　设 S 是 G 的 Sylow 2 子群且 A 是 S 的交换子群, 满足

$$a \in A,\ a^g \in S\ (g \in G) \Rightarrow a^g \in A③.$$

假设 $G = \langle A^G \rangle$ 且 $O_{2'}(G) = 1$. 那么

$$G = F^*(G),\ A = O_2(G)\Omega(T),$$

且对 G 的每一个分支 K, 商群 $K/Z(K)$ 同构于

$$PSL_2(2^n),\ Sz(2^{2n-1}),\ PSU_3(2^n) (n \geqslant 2),$$
$$PSL_2(q), q \equiv 3, 5 (\mathrm{mod}\ 8),\ R(3^{2n+1}) (n \geqslant 1) \text{ 或 } J_1.$$

---

① 因此 $G/Z^*(G)$ 的 Sylow 2 子群是二面体群, 所以 $G/Z^*(G)$ 的结构由下面的 Gorenstein-Walter 定理给出.

② 强 2 嵌入子群在第 10 章的符号中.

③ A 在 S 中关于 G 是强闭的.

Thompson[94]　设 G 是对每一个 $p \in \pi(G)$, p 局部子群都可解的非可解群. 那么 $F^*(G)$ 同构于

$PSL_2(q)(q>3)$, $Sz(2^{2n-1})(n \geqslant 2)$, A_7, M_{11}, $PSL_3(3)$ $PSU_3(3)$ 或 ${}^2F_4(2)'$.

Gorenstein, Lyons[61]**, Janko**[73]**, Smith**[83]　设 G 是所有 2 局部子群都可解的非可解群. 那么 $F^*(G)$ 同构于

$PSL_2(q), q>3, Sz(2^{2n-1}), PSU_3(2^n)(n \geqslant 2), A_7, M_{11}, PSL_3(3)$, $PSU_3(3)$ 或 ${}^2F_4(2)'$.

分类定理①：每一个有限单群都同构于下列群之一：

(1) 素数阶循环群.

(2) 交错群 $A_n, n \geqslant 5$.

(3) 典型线性群②：

$$PSL_n(q),\ PSU_n(q),\ PSp_{2n}(q) \text{ 或 } PO_n^\varepsilon(q).$$

(4) 例外 Lie 型群③：

$${}^3D_4(q), E_6(q), {}^2E_6(q), E_7(q), E_8(q), F_4(q), {}^2F_4(2^n), G_2(q), {}^2G_2(3^n) \text{ 或 } {}^2B_2(2^n).$$

(5) 零散单群：

$M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$(Mathieu 群)④,

J_1, J_2, J_3, J_4(Janko 群)⑤,

Co_1, Co_2, Co_3(Conway 群),

HS, Mc, Suz,

Fi_{22}, Fi_{23}, Fi_{24}'(Fischer 群),

F_1(魔群⑥), F_2, F_3, F_5,

He, Ru, Ly, ON.

---

① 见文献 [10] 和研究文章 [84].

② 这些群的描述可在 [13] 中找到, 在 [5] 中作为 Lie 型群.

③ 见文献 [5].

④ 这些群大约在 1860 年由 Mathieu[77] 发现. 第 1 个清晰的构造由 Witt[100] 在 1938 年给出.

⑤ J_1 在 1965 年发现 [72], 这是在 Mathieu 群之后的第 1 个零散群.

⑥ F_1 是最大的零散单群, 它的阶为 $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$.

索 引

其他